

**LES PRÉSENTATIONS DU GROUPE DE TRESSES ASSOCIÉES  
À DES GRAPHES PLANAIRES**

K. GRACE KENNEDY  
SOUS LA DIRECTION DE F. DIGNE

2007

# LES PRÉSENTATIONS DU GROUPE DE TRESSSES ASSOCIÉES À DES GRAPHES PLANAIRES

K. GRACE KENNEDY  
SOUS LA DIRECTION DE F. DIGNE

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
1.1. Le groupe de tresses	1
1.2. Les graphes	4
2. Le théorème	9
3. Démonstration du Théorème 16	11
3.1. Les lemmes	12
3.2. Démonstration des lemmes	13
3.3. Démonstration du Théorème 16	19
4. Les corollaires	22
Références	25

## 1. INTRODUCTION

Dans son article de 1993 [7], Vlad Sergiescu (Université de Grenoble I) nous offre une nouvelle nouvelle façon de présenter le groupe de tresses en considérant un graphe où les brins partent des sommets du graphe. Il nous démontre que n'importe quel graphe à  $n$  sommets engendre le même groupe de tresses,  $B_n$ , que celui donné par Emil Artin en 1925 [1].

Ce mémoire commence par une définition dans la Partie 1.1 de cette présentation donnée par Artin, et il continue avec une discussion du vocabulaire des graphes et leur rôle en définissant le groupe de tresses dans la Partie 1.2. Puis dans la Partie 2, on introduit la théorème principal de l'article de Sergiescu et ses lemmes dans la Partie 3.1. Dans les Parties 3.2 et 3.3, il s'agit de les démontrer. On termine avec une discussion de quelques conséquences du théorème dans la Partie 4.

**1.1. Le groupe de tresses.** Il y a plusieurs façons de décrire le groupe de tresses. On commence avec une idée visuelle donnée dans le livre de Dehornoy [2]. Le groupe de tresses est un plongement dans le cylindre,  $D^2 \times I$ , de plusieurs copies de l'intervalle  $I = [0, 1]$  qui descendent d'une façon monotone et qui laisse croiser ces intervalles les uns sur les autres.

**Définition 1.** *Un brin est un plongement  $f : I \rightarrow D^2 \times I$  qui commence à un point  $f(0) = p$  au-dessus du cylindre et qui termine à un point  $f(1) = p'$  directement en dessous de  $p$ .*

Un  $n$  – brin est donc  $n$  copies de l'intervalle  $I = [0, 1]$  dans le cylindre qui commencent aux points  $p_1, \dots, p_n$  et qui terminent aux points  $p'_1, \dots, p'_n$  qui se trouvent directement au-dessous des points d'origine. Voir la Figure 1 ci-dessous.

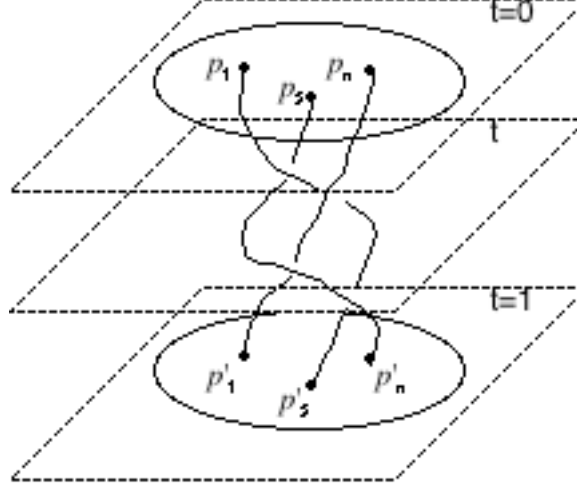


Figure 1.

On voit qu'un  $n$  – brin définit une permutation de  $n$  éléments.

**Définition 2.** Le groupe de tresses est l'ensemble des  $n$  – brins à déformation près avec l'opération de concaténation suivie par réparamétrisation pour réduire l'hauteur du cylindre de deux à un.

On dit que deux brins sont équivalents si on peut étirer ou bouger les brins sans les briser en gardant les extrémités constantes.

Cette description s'accorde avec la remarque de Fadell et Neuwirth [3] : Soient

$\Sigma_n$  le groupe symétrique

$$\widetilde{Conf}^n = \{(\mathbb{R}^2)^n - \{(x_j) \mid \exists i, j \text{ tel que } x_i = x_j\}\}, \text{ et}$$

$$Conf^n = \Sigma_n \setminus \widetilde{Conf}^n.$$

L'ensemble  $\widetilde{Conf}^n$  est donc le sous-ensemble de  $(\mathbb{R}^2)^n$  dont les éléments ont des coordonnées deux à deux différentes. Le quotient  $Conf^n = \Sigma_n \setminus \widetilde{Conf}^n$  est l'espace de configuration de  $n$  points. Cela veut dire qu'un élément dans  $Conf^n$  est l'ensemble de toutes les permutations sur un élément de  $\widetilde{Conf}^n$ . On peut considérer un élément dans  $Conf^n$  comme un ensemble non ordonné de points dans  $\mathbb{R}^2$ . Un chemin dans cet espace est donc une fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow Conf^n$  tel que  $f(t) = \{t_1, \dots, t_n\}$  où  $t$  est dans  $[0, 1]$  et  $t_i$  est dans  $\mathbb{R}^2$ .

Dans la Figure 1, un chemin  $f$  correspond de  $n$  intervalles de 0 à 1 dans un cylindre. Aussi  $f(t)$  décrit l'emplacement de chaque brin comme un ensemble d'éléments distincts de  $\mathbb{R}^2$ . On peut visualiser  $f(t)$  comme l'intersection orthogonale du plan  $\mathbb{R}^2$  avec le cylindre à la hauteur  $t$ . (Voir cette intersection dans la Figure 1.)

Soit  $S$  un ensemble de  $n$  points distincts dans  $\mathbb{R}^2$ . Alors,  $S$  est un élément dans  $Conf^n$ . Quand on prend le groupe fondamental,  $\pi(Conf^n; S)$ , on a le groupe de tresses. Cela formalise la description donnée dans la Définition 2.

En 1925, Emil Artin nous donna une présentation du groupe de tresses. On considère la situation où  $n$  points de départ pour  $n$  brins sont dans une ligne directement au-dessus de  $n$  points d'arrivée. On note  $\sigma_i$  pour  $2 \leq i \leq n$  le brin où le  $i$ -ème brin passe au-dessus du  $i - 1$ -ème comme dans la Figure 2.

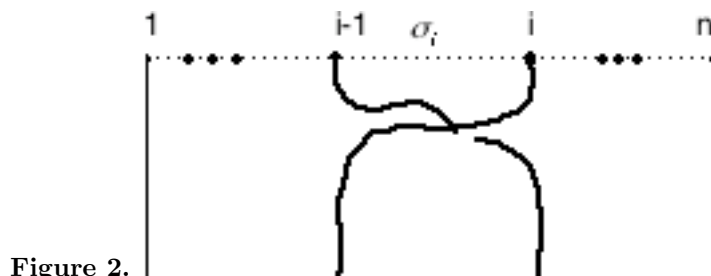


Figure 2.

Son inverse,  $\sigma_i^{-1}$  et l'élément neutre,  $id_{B_n}$ , sont respectivement :

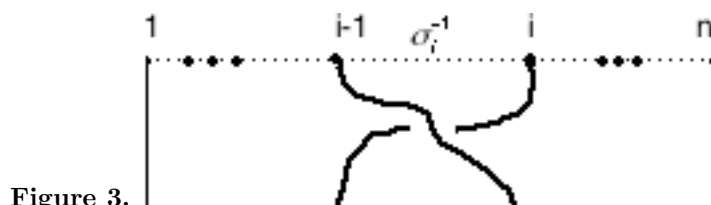


Figure 3.

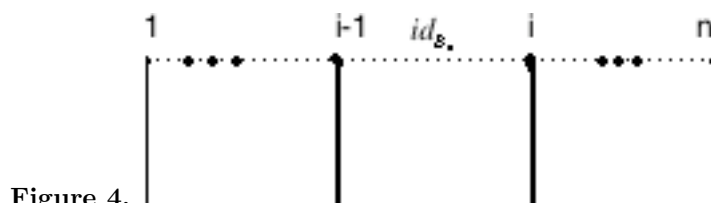


Figure 4.

On peut voir que si on concatène les brins des Figures 2 et 3, on a bien le brin de Figure 4. En outre, si l'on ajoute le brin de Figure 4 à un autre brin,  $b'$ , cela ne change pas de croisements du brin. Dès lors on a que  $id_{B_n}$  agit comme l'élément neutre de  $B_n$ . Artin démontra que les  $\sigma_i$  et leurs inverses engendrent le groupe de tresses, et il donna la présentation suivante :

**Présentation d'Artin :** Pour  $n \geq 2$ , le groupe de tresses  $B_n$  a pour présentation

$$\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ for } |i - j| \geq 2, \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \rangle.$$

La première relation devrait se comprendre intuitivement ; si on a deux croisements engageant quatre brins distincts, on peut glisser un croisement au-delà de l'autre. (Voir la Figure 5.)

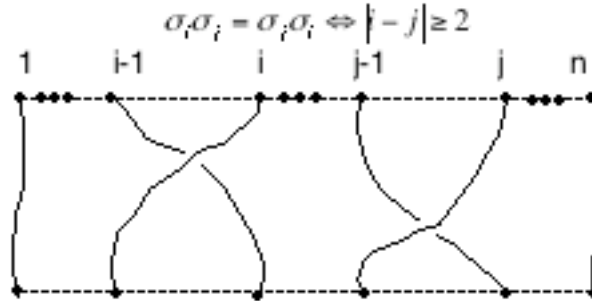
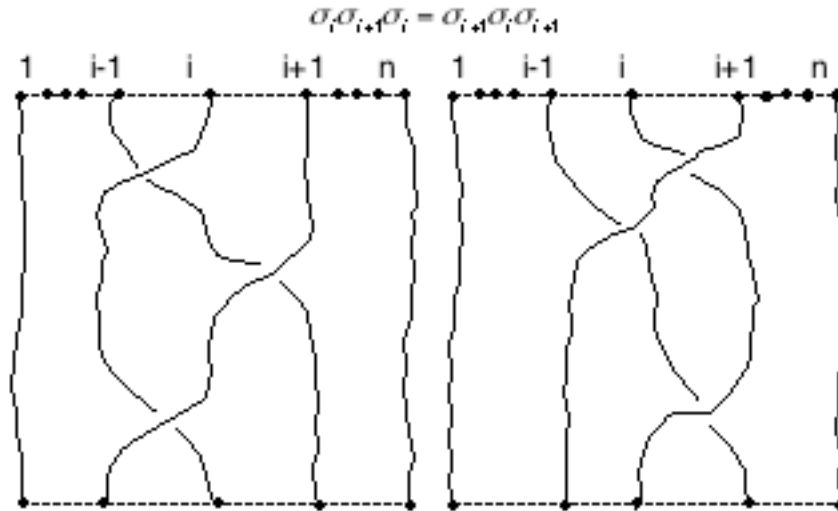


Figure 5.

La deuxième se voit dans la Figure 6 suivante :

Figure 6.



On a le  $i - 1$ -ème brin qui passe derrière les autres pour terminer au  $i + 1$ -ème point d'arrivée, le  $i + 1$ -ème qui passe au-dessus des autres pour arriver au  $i - 1$ -ème point et le  $i$ -ème qui passe entre les deux pour terminer dans la  $i$ -ème position.

Cela nous donne une présentation qui rend les calculs plus faciles à manipuler et qui donne une approche plus combinatoire à l'étude du groupe de tresses.

**1.2. Les graphes.** Le but de cet article est de généraliser la présentation du groupe de tresses en considérant différentes positions des points de départ et des combinaisons différentes des croisements qui engendrent le groupe de tresses.

La présentation donnée par Artin est simple ; elle utilise une position alignée des points de départ, et elle est engendrée par les croisements de brins voisins. Cette présentation a l'avantage d'être facilement visualisée et manipulée d'une façon combinatoire. Cette organisation des points voisins liés par des lignes est un cas particulier de ce que l'on appelle un graphe. On traitera d'abord ce que c'est un graphe puis le lien avec le groupe de tresses. Avant de définir un graphe, il nous faut quelques définitions de base données par Lima [4] :

**Définition 3.** Une arête,  $\sigma$ , est un sous ensemble de  $\mathbb{R}^n$  homéomorphe à  $[0, 1]$ , et les images des points 0 et 1 sont les sommets. L'intérieur d'une arête est appelé une arête ouverte. En fait, une arête ouverte est une arête sans les sommets.

Cela nous amène à la définition d'un graphe :

**Définition 4.** Un graphe,  $\Gamma$ , est la réunion des arêtes qui satisfait aux conditions suivantes :

- (1) L'intersection de n'importe quelle paire d'arêtes distinctes est soit vide soit l'ensemble d'un ou deux sommets.
- (2) Un sous-ensemble  $\Gamma' \subset \Gamma$  est fermé (respectivement ouvert) si et seulement si  $\Gamma' \cap \sigma$  est une arête fermée (respectivement ouverte) pour chaque arête,  $\sigma$  dans  $\Gamma$ .

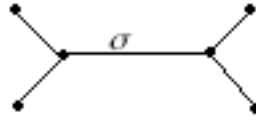
Plus simplement, un graphe est composé d'un ensemble de points, ou sommets, liés par des arêtes. Si l'on a deux graphes,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , on note

$$S(\Gamma_1) = \text{l'ensemble des sommets de } \Gamma_1$$

et si  $S(\Gamma_1) = S(\Gamma_2)$ , on dit que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  ont *mêmes sommets*.

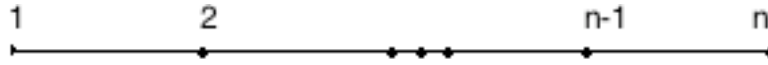
Dans l'article de Sergiescu, on ne considère que les graphes qui peuvent s'écrire dans le plan, ou les *graphes planaires*. Aussi, dans l'article, il s'agit toujours des graphes *connexes*, c'est à dire, tels que chaque paire de sommets est liée par une suite finie d'arêtes.

**Exemple 5.** Soit  $\Gamma$  la figure suivante :



Alors  $\Gamma$  est bien un graphe connexe à six sommets, et  $\sigma$  est une arête.

**Exemple 6.** Soit  $\Gamma$  la figure suivante :

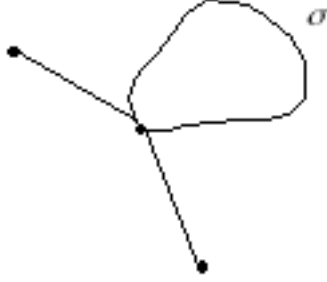


Alors  $\Gamma$  est bien un graphe connexe avec  $|S(\Gamma)| = n$ . En fait, on appelle ce type de graphe un *n-arc* [8].

**Définition 7.** Soit  $\Gamma$  un graphe. Un circuit est une suite finie d'arêtes de  $\Gamma$ ,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , où les sommets  $u_i$  et  $v_i$  de  $\sigma_i$  vérifient  $u_{i+1} = v_i$  pour tout  $i \in \{1, 2, \dots, n - 1\}$  et  $u_1 = v_n$ .

**Remarque 8.** D'abord, on constate qu'un circuit est connexe et si on enlève l'intérieur d'une arête, on a encore un graphe connexe. En effet, si on enlève l'intérieur d'une arête  $\sigma_i$  ayant  $u_i$  et  $v_i$  pour sommets définis comme dans la Définition 7 d'un circuit,  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ , on peut aller de  $v_i$  à  $u_i$  par  $\sigma_{i+1}\sigma_{i+2} \dots \sigma_n\sigma_1 \dots \sigma_{i-1}$ .

Une *boucle* est une arête dont les deux sommets sont confondus (voir Figure 7 ci-dessous).



**Figure 7.**

Pour les graphes dans le papier de Sergiescu, on suppose qu'il n'y a pas de boucle, c'est à dire que toute arête a deux sommets distincts.

Les exemples 5 et 6 n'ont pas de circuits. Ce sont des graphes que l'on appelle des arbres.

**Définition 9.** *Un arbre est un graphe,  $\Gamma$ , qui est connexe tel que  $\Gamma - \text{int}\sigma$  n'est pas connexe pour toute arête  $\sigma$  du graphe.*

On voit qu'un arbre n'est pas forcément un *graphe fini* (i.e. qu'il a un nombre fini d'arêtes et donc un nombre fini de sommets). D'après la Remarque 8, pour  $\Gamma$  un graphe connexe,  $\Gamma$  est un arbre si et seulement s'il n'a pas de cycle. En effet, la Remarque 8 implique la condition suffisante et la contraposé de la condition nécessaire. En effet, si  $\Gamma$  n'est pas un arbre, il existe une arête,  $\sigma$  avec sommets  $u$  et  $v$  telle que  $\Gamma - \text{int}\sigma$  est connexe. Cela implique qu'il existe un nombre fini des arêtes  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  aux sommets  $u_i$  et  $v_i$  tels que  $u_1 = v$ ,  $u_i + 1 = v_i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ , et  $v_n = u$ . Donc on aurait que  $\Gamma$  a un circuit.

Si  $\Gamma$  est un arbre fini, on a la propriété suivante :

**Proposition 10.** *Chaque arbre fini a un sommet libre, c'est à dire un sommet qui appartient à une seule arête.*

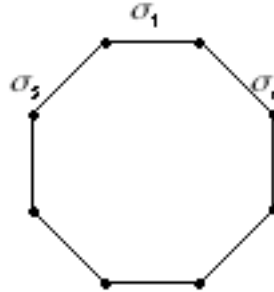
*Démonstration.* Soit  $\Gamma$  un arbre fini à  $n$  arêtes. On considère  $\sigma_1$  une arête de sommets  $u_1$  et  $v_1$ . Si  $v_1$  est libre, on a terminé. Sinon,  $v_1$  appartient à une autre arête,  $\sigma_2$  de sommets  $u_2 = v_1$  et  $v_2$ . Soit  $v_2$  est libre, soit il appartient à une autre arête. Comme le graphe est fini, soit on arrive à un sommet libre, soit on tombe sur un  $v_j$  qui coïncide avec un  $u_i$  obtenu avant. Cela nous donne un cycle, qui n'est pas possible dans un arbre. Donc il faut que chaque arbre fini ait un sommet libre.  $\square$

Un graphe fini a un nombre fini de sommets, mais un graphe avec un nombre fini de sommets peut être infini. Par exemple, on peut avoir un graphe à deux sommets avec un nombre infini d'arêtes qui les joignent. Si le graphe est un arbre, un nombre fini de sommets implique un nombre fini d'arêtes car cela ne peut pas arriver qu'il y ait plus qu'une arête entre deux sommets. (Autrement il y aurait un circuit.) Dans l'article de Sergiescu, il s'agit toujours des graphes *localement fini*, autrement dit tels que chaque disque borné dans le plan ne contient qu'un nombre fini d'arêtes.

Maintenant, il nous faut quelques notions pour décrire un graphe :

**Définition 11.** *Soit  $\Gamma$  un graphe. Un pseudo-cycle irréductible est un ensemble d'arêtes qui décrivent un circuit fermé de  $\Gamma$  qui borde un disque ne contenant pas de point du graphe dans l'intérieur. Un retournement est deux fois la même arête dans un pseudo-cycle irréductible.*

Un circuit fermé qui borde un disque n'est qu'un circuit tel que son intérieur,  $D$ , est homotope à un disque. On regardera quelques exemples.



Exemple 12.

Le graphe de l'Exemple 12 est un exemple simple d'un pseudo-cycle irréductible, et on voit facilement dans la Figure 8 suivante que l'on a un circuit fermé qui borde un disque, marqué avec la flèche, et sans point dans l'intérieur.

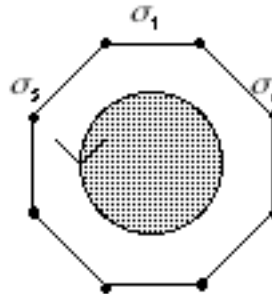
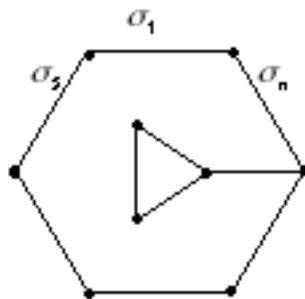


Figure 8.

On considère l'Exemple 13 qui est un peu plus compliqué :



Exemple 13.

Le disque bordé par cet pseudo-cycle irréductible est indiqué dans la Figure 9 suivante :

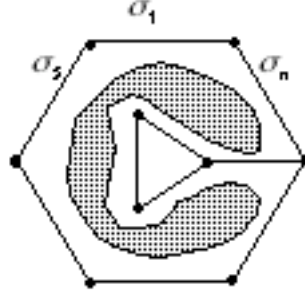
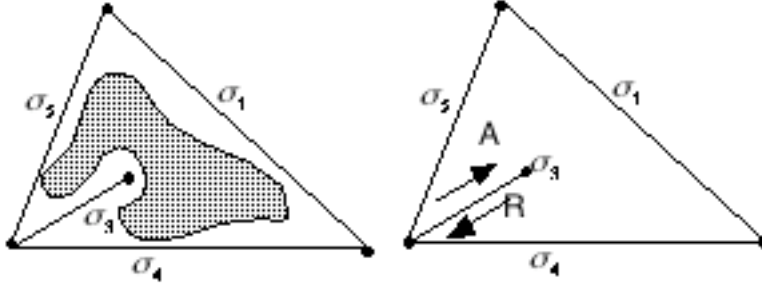


Figure 9.

Voici un exemple d'un pseudo-cycle irréductible qui a un retournement :

## Exemple 14.



À gauche, on voit la disque bordé par ce pseudo-cycle, et à droite, on a le retournement marqué avec  $A$  et  $R$  indiquants l'aller et le retour respectivement.

On introduit quelques notions importantes pour décrire un graphe.

**Définition 15.** Soit  $\Gamma$  un graphe. On appelle nœud tout sommet ayant au moins trois arêtes. La valence d'un nœud est le nombre d'arêtes qui en sortent. La valence d'un graphe,  $v(\Gamma)$  est la somme des valences des nœuds. La complexité de  $\Gamma$  est le nombre total de pseudo-cycles irréductibles de  $\Gamma$ . Elle est notée  $b(\Gamma)$  et appelée le premier nombre de Betti de  $\Gamma$ .

Regardons quelques exemples. Dans l'Exemple 5,  $v(\Gamma) = 6$ ,  $b(\Gamma) = 0$ , et les deux nœuds sont les sommets de  $\sigma$ . Dans l'Exemple 6,  $v(\Gamma) = 0$  et  $b(\Gamma) = 0$ . Exemple 12 est un graphe sans nœud mais avec  $b(\Gamma) = 1$ . L'Exemple 13 nous offre un graphe avec  $b(\Gamma) = 2$ . Le premier pseudo-cycle est déjà marqué dans la Figure 9 est l'autre est dans l'intérieur du triangle.

Comme on l'a dit au début de la Partie 1.2, le but de cet article est de généraliser la présentation donnée par Artin, donc il faut expliquer la relation entre un graphe et le groupe de tresses. On note  $B_\Gamma$  le groupe de tresses à  $|S(\Gamma)|$  brins partants des sommets de  $\Gamma$ . Alors,  $B_\Gamma \simeq B_{|S(\Gamma)|}$ .

On considère le graphe vu dans l'Exemple 5 ; on associe à chaque arête,  $\sigma$ , une tresse  $\bar{\sigma}$  vue ci-dessous :

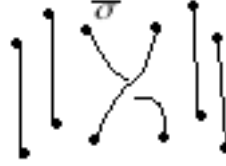


Figure 10.

En suivant la même notation que Sergiescu, on note  $\sigma$  pour l'arête géométrique et aussi pour la tresse associée.

On voit dans la Figure 2 et l'Exemple 6 que la présentation d'Artin n'est qu'un cas spécial d'un graphe à  $n$  sommets sans arête multiple, ou un  $n$ -arc. L'intérêt de ces nouvelles descriptions du groupe de tresses est qu'elles apparaissent naturellement dans des contextes géométriques. Le but de cet article est de démontrer que pour tous graphes ayant les mêmes sommets, quelque soient leurs arêtes, ils engendrent le même groupe de tresses défini par la présentation simple d'Artin.

## 2. LE THÉORÈME

On rappelle que dans le papier de Sergiescu, il s'agit toujours de graphes connexes, planaires localement finis sans boucles. C'est à dire qu'on considère des graphes tels que

- pour  $x, y$  deux sommets quelconques, il existe une suite finie d'arêtes qui les relient,
- ils peuvent être décrit dans le plan,
- dans chaque disque borné dans le plan, on trouve un nombre fini d'arêtes, et
- chaque arête relie deux sommets distincts.

On note  $B_\Gamma$  le groupe de tresses à  $|S(\Gamma)| = n$  brins partants des sommets de  $\Gamma$ . Le résultat principal de cet article est que pour n'importe quel graphe connexe, planaire localement fini sans boucles à  $n$  sommets, les arêtes engendrent  $B_\Gamma \simeq B_n$ , le groupe de tresses à  $n$  brins. Formellement,

**Théorème 16.** *Le groupe de tresses  $B_\Gamma$  a la présentation  $\langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle$ , où*

$$X_\Gamma = \{\sigma \mid \sigma \text{ arête de } \Gamma\}$$

et  $R_\Gamma$  est formé de quatre types de relations suivants :

- (1) *disjonction : si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont disjointes, alors*

$$\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1.$$

- (2) *adjacence : si  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  ont un sommet en commun alors :*

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2.$$

- (3) *nodale : si  $\sigma_1, \sigma_2$ , et  $\sigma_3$  ont un seul nœud en commun et sont disposées dans le sens horaire comme vu dans la Figure 11, alors :*

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

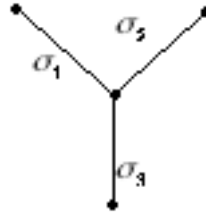


Figure 11.

- (4) *cyclique* : si  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  est un pseudo-cycle irréductible (i.e.  $\sigma_1 \dots \sigma_n$  décrivent dans le sens antihoraire <sup>1</sup> un circuit fermé de  $\Gamma$  qui borde un disque ne contenant pas de point du graphe dans l'intérieur comme dans la Figure 12) et si  $\sigma_1$  n'est pas l'aller ni  $\sigma_n$  le retour d'un retournement alors

$$\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

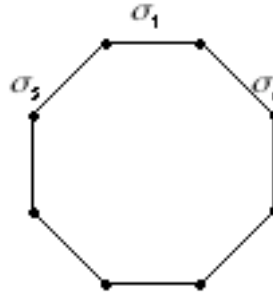


Figure 12.

$$\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n = \sigma_3 \dots \sigma_n \sigma_1 = \dots = \sigma_n \sigma_1 \dots \sigma_{n-2}$$

Si on est dans le cas de la présentation d'Artin, le 3 et 4 ne sont pas applicables car dans ce graphe simple, il n'arrive jamais que l'on trouve un cycle ou un sommet avec trois arêtes. On voit que avec les relations 1 et 2, cette présentation correspond à la présentation d'Artin. Sergiescu inclut comme Corollaire 0.1 la remarque que si  $\Gamma$  est un arbre, alors le groupe  $B_\Gamma$  admet la présentation  $\langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle$ , où seules les relations 1, 2, 3, et 4 du théorème apparaissent.

La quatrième relation vaut un peu plus d'explication. Pour mieux visualiser cette relation, on considère un cycle irréductible à six sommets dans la Figure 13.

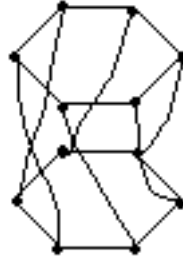


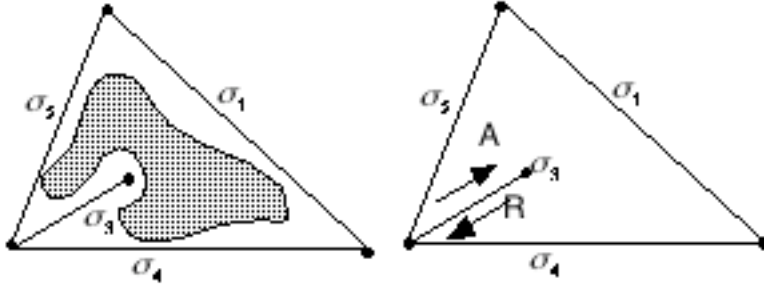
Figure 13.

Dans les exemples de Figures 12 et 13, il n'est pas nécessaire de préciser que  $\sigma_1$  n'est pas l'aller ni  $\sigma_n$  le retour d'un retournement car il n'y a pas de retournements.

<sup>1</sup>On constate par les Figures 5 et 6 du papier de Sergiescu, qu'il voulait dire dans le sens *antihoraire* au lieu de *horaire*.

Dans la Figure 14, on revient à l'Exemple 14 dans la Partie 1.2 d'un pseudo-cycle irréductible qui a un retournement :

Figure 14.



On rappelle que le retournement est marqué avec  $A$  et  $R$  indiquants l'aller et le retour respectivement. D'une façon générale, la relation 4 nous donne des relations de la forme suivante :

$$\underbrace{\sigma'_1 \cdots \sigma'_{n-1}}_{\text{pas un aller}} = \sigma'_2 \cdots \underbrace{\sigma'_n}_{\text{pas un retour}}$$

Ici, cela nous donne les relations suivantes :

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2 = \sigma_2 \sigma_3^2 \sigma_4 = \sigma_3^2 \sigma_4 \sigma_1$$

$$\sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

et pas la relation :

$$\underbrace{\sigma_3^2 \sigma_4 \sigma_1}_{\text{Le premier } \sigma_3 \text{ est un aller}} = \sigma_3 \sigma_4 \sigma_1 \sigma_2$$

$$\sigma_4 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 = \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^2}_{\text{Le dernier } \sigma_3 \text{ est un retour}}$$

Cela termine notre discussion du Théorème 16. La reste du papier va être consacrée à le démontrer.

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 16

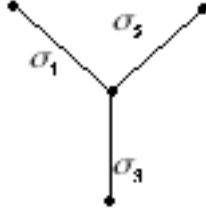
Le théorème se démontre par une sorte de récurrence sur le type ou "complexité" du graphe, en commençant avec le cas d'un arbre fini (par récurrence sur la valence), puis un graphe fini (par récurrence sur la complexité), et enfin on traite le cas d'un graphe infini.

Trois lemmes vont nous aider à démontrer cette récurrence. Le premier lemme démontre les relations 3 et 4 pour les graphes très simples. Les autres lemmes vont nous aider à l'étape de récurrence.

## 3.1. Les lemmes.

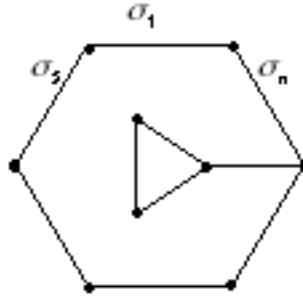
**Lemme 1.** *On considère un graphe  $\Gamma$ .*

(1) *Soit  $\Gamma_1$  le graphe :*



*Si  $\Gamma_1$  est un sous-graphe de  $\Gamma$ , dans le groupe  $B_\Gamma$ , on a  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ .*

(2) *Soit  $\Gamma_2$  un pseudo-cycle irréductible dans  $\Gamma$  par exemple, celui de l'Exemple 13 :*



*Si  $\sigma_1$  n'est pas l'aller ni  $\sigma_n$  le retour d'un retournement, alors dans  $B_\Gamma$ , on a*

$$\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

Les deuxième et troisième lemmes nous permettent de passer d'un graphe à un autre en enlevant ou en ajoutant une arête.

**Lemme 2.** *Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux arêtes voisines d'un graphe,  $\Gamma$ , qui ne font pas partie d'un cycle. Soit  $\Gamma' = \Gamma \cup \{\tau\}$  le graphe obtenu en ajoutant une arête  $\tau$  à  $\Gamma$  comme ci-dessous :*

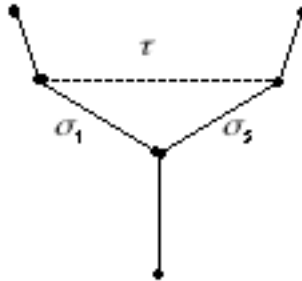


Figure 15.

Si le théorème est vrai pour  $\Gamma$ , alors il est vrai pour  $\Gamma'$ .<sup>2</sup>

Le deuxième lemme nous donne le droit d'ajouter une arête en sachant que le théorème reste vrai pour le nouveau graphe supposant qu'il était vrai pour le premier. Le troisième lemme fait le contraire : si on enlève une arête d'un graphe pour lequel le théorème est vrai, le théorème est encore vrai pour le nouveau.

**Lemme 3.** Soit  $\tau$  une arête d'un graphe  $\Gamma'$  qui borde un seul pseudo-cycle irréductible qui est un triangle  $\tau\sigma_1\sigma_2$ . Si le théorème est vrai pour  $\Gamma'$ , alors il l'est aussi pour  $\Gamma$  où  $\Gamma = \Gamma' - \tau$  (voir Figure 15).

3.2. **Démonstration des lemmes.** Si on a le graphe de la Figure 16

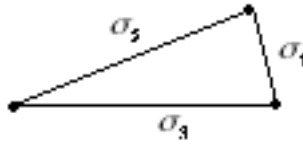


Figure 16.

on a la relation de triangle :

$$\sigma_2\sigma_3 = \sigma_3\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2.$$

Cette relation se voit dans la Figure 17.

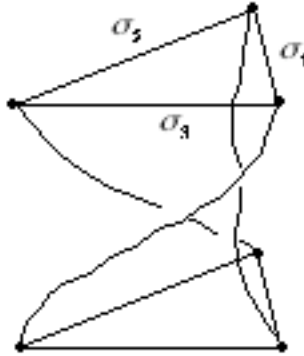
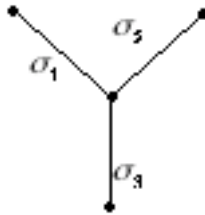


Figure 17.

On utilisera cette relation dans les démonstrations des lemmes. On commence par la démonstration du Lemme 1 :

*Démonstration.* D'abord, on traite la première partie du lemme.

(1) Soit  $\Gamma_1$  le graphe :

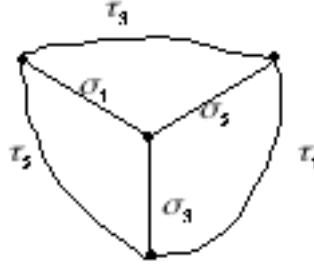


<sup>2</sup>On constate que dans son papier, Sergiescu voulait dire "Si le théorème est vrai pour  $B_\Gamma$ , alors il est vrai pour  $B_{\Gamma'}$ " au lieu de "Si le théorème est vrai pour  $B_{\Gamma'}$ , alors il est vrai pour  $B_\Gamma$ ".

On veut démontrer dans le groupe  $B_{\Gamma_1}$ , on a

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = \sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

On considère le graphe  $\Gamma'_1$  suivant :



On va appliquer la relation de triangle aux arêtes  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , et  $\tau_3$  pour avoir

$$(3.1) \quad \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\tau_3 = \tau_3\sigma_1.$$

Aussi, comme  $\sigma_3$  et  $\tau_3$  sont disjointes, on a

$$(3.2) \quad \sigma_3\tau_3 = \tau_3\sigma_3.$$

Cela nous donne

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_1 = (\sigma_2\tau_3)\sigma_3\sigma_1 \quad (3.1)$$

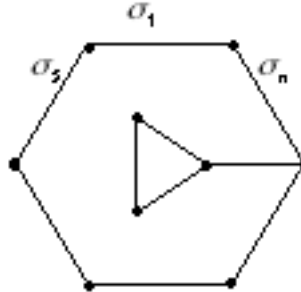
$$= \sigma_2(\sigma_3\tau_3)\sigma_1 \quad (3.2)$$

$$= \sigma_2\sigma_3(\sigma_1\sigma_2) \quad (3.1)$$

Mutatis mutandis, on arrive à l'autre relation :

$$\sigma_2\sigma_3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_3\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

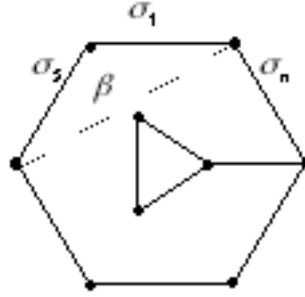
(2) Soit  $\Gamma_2$  un pseudo-cycle irréductible. On reprend le même Exemple 13 :



On veut montrer que si  $\sigma_1$  n'est pas l'aller ni  $\sigma_n$  le retour d'un retournement, alors

$$\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n.$$

On fait par récurrence sur la longueur du pseudo-cycle irréductible. Si  $n = 2$ , le résultat est clair car  $\sigma_1 = \sigma_2$ . Si  $n = 3$ , le résultat provient de la relation de triangle. Donc, on suppose que le lemme est vrai pour  $n - 1$ . On considère le graphe où l'on ajoute une arête  $\beta$  de façon que  $\sigma_1, \sigma_2$ , et  $\beta$  soient un triangle. Dans l'exemple, on a :



Cela nous permet d'utiliser la relation de triangle :

$$(3.3) \quad \sigma_2\beta = \beta\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2.$$

Maintenant, on a un pseudo-cycle irréductible de taille  $n-1$  :  $\beta\sigma_3 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n$ . La hypothèse de récurrence nous donne

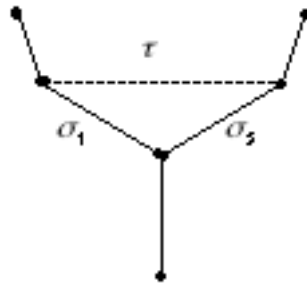
$$(3.4) \quad \beta\sigma_3 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_3 \dots \sigma_{n-1}\sigma_n.$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \dots \sigma_{n-1} &= (\sigma_2\beta)\sigma_3 \dots \sigma_{n-1} & (3.3) \\ &= \sigma_2(\sigma_3 \dots \sigma_n) & (3.4) \end{aligned}$$

On a démontré le Lemme 1. □

On va faire la démonstration du troisième lemme avant le deuxième. Ce lemme est un peu moins évident que le deuxième, et les arguments ici vont nous aider dans la démonstration de l'autre. On rappelle de quoi il s'agit dans le Lemme 3. Soit  $\tau$  une arête d'un graphe  $\Gamma'$  qui borde un seul pseudo-cycle irréductible qui est un triangle  $\tau\sigma_1\sigma_2$ . On reproduit la Figure 15 ci-dessous.



$$\Gamma' \text{ et } \Gamma = \Gamma' - \{\tau\}$$

On veut montrer que si le théorème est vrai pour  $\Gamma'$ , alors il l'est aussi pour  $\Gamma$  où  $\Gamma = \Gamma' - \{\tau\}$ .

*Démonstration.* On suppose que le théorème est vrai pour  $\Gamma'$  décrit au-dessus. C'est-à-dire que

$$B_{\Gamma'} = \langle X_{\Gamma'}, R_{\Gamma'} \rangle$$

où  $X_{\Gamma'}$  et  $R_{\Gamma'}$  sont les générateurs et relations donnés par le théorème. On considère les relations engendrées par  $R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . On va démontrer que  $R_{\Gamma'} \subset R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Comme  $\langle X_{\Gamma'}, R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\} \rangle$  et  $\langle X_{\Gamma}, R_{\Gamma} \rangle$  diffèrent par une transformation élémentaire de Tietze, ils définissent le même groupe [5] [6]. Alors, quand on aura démontré que  $R_{\Gamma'} \subset R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ , on aura que  $\langle X_{\Gamma}, R_{\Gamma} \rangle$  et  $\langle X_{\Gamma'}, R_{\Gamma'} \rangle$  définissent le même groupe  $B_{\Gamma} = B_{\Gamma'}$ .

D'abord, on va démontrer que l'on a la relation de triangle dans  $R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Cela nous aidera dans la suite. En effet,

$$\begin{aligned} \tau\sigma_1 &= (\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})\sigma_1 \\ &= \sigma_1\sigma_2 \\ &= \sigma_1\sigma_2(\sigma_1\sigma_1^{-1}) \\ &= (\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_1^{-1} \\ &= \sigma_2\tau. \end{aligned}$$

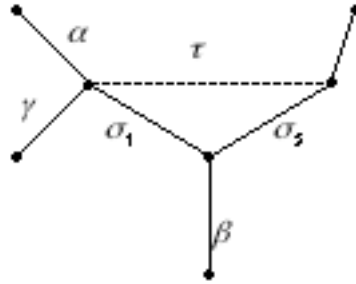
Donc, on a que la relation de triangle,

$$(3.5) \quad \tau\sigma_1 = \sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\tau$$

est dans  $R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . On a aussi une nouvelle description de  $\tau$  :

$$(3.6) \quad \tau = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2.$$

On démontre que les quatre types de relations de  $R_{\Gamma'}$  sont dans  $R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Il est clair que toutes relations de  $R_{\Gamma'}$  où il ne s'agit pas de  $\tau$  seront dans  $R_{\Gamma} \subset R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Donc nous allons nous intéresser à ce qui se passe autour de  $\tau$ . Pour la visualiser, on utilisera la Figure 18.



**Figure 18.**

– *disjonction* :

On a que pour toutes  $\sigma, \sigma'$  disjointes dans  $\Gamma$ ,  $\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$  est dans  $R_{\Gamma} \subset R_{\Gamma} \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Soient  $\beta \in \Gamma$  et  $\tau$  disjointes. On constate que  $\beta$  et  $\sigma_1$  sont disjointes si et seulement si  $\beta$  et  $\sigma_2$  le sont. Si  $\beta$  est disjointe de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ,

alors le résultat est clair, résultant du fait que  $\beta$  commute avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  et donc avec  $\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$ .

On suppose que  $\beta$  est contigüe avec  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Alors,  $\tau\beta = \beta\tau$  si et seulement si

$$\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\beta = \beta\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$$

d'après la relation 3.6 et la relation  $\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}$ . En appliquant  $\sigma_2^{-1}$  à gauche et  $\sigma_1^{-1}$  à droite, on voit que c'est équivalent à

$$\sigma_1\sigma_2\beta\sigma_1 = \sigma_2\beta\sigma_1\sigma_2,$$

ce qui est bien une relation nodale de  $R_\Gamma$ . Donc on a pour toutes  $\sigma, \sigma'$  dans  $\Gamma'$  disjointes,

$$\sigma\sigma' = \sigma'\sigma$$

est une relation dans  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ .

– *adjacence* :

Pour démontrer la relation d'adjacence, c'est le même type de jeu. Si  $\sigma, \sigma'$  dans  $\Gamma$  ont un sommet en commun, alors  $\sigma\sigma'\sigma = \sigma'\sigma\sigma'$  est dans  $R_\Gamma \subset R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . On suppose que  $\alpha$  est adjacente à  $\tau$ . Si  $\alpha = \sigma_1$ , il s'agit de deux applications de la relation de triangle 3.5 :

$$\tau\sigma_1\tau = \sigma_1\sigma_2\tau = \sigma_1\tau\sigma_1.$$

Alors, si  $\alpha$  n'est pas égal ni à  $\sigma_1$  ni à  $\sigma_2$ , elle est quand même adjacente soit à  $\sigma_1$ , soit à  $\sigma_2$  et alors disjointe de l'autre. Sans perte de généralité, on suppose que  $\alpha$  est adjacente à  $\sigma_1$ , ce qui nous donne :

$$(3.7) \quad \sigma_2\alpha = \alpha\sigma_2$$

et

$$(3.8) \quad \alpha\sigma_1\alpha = \sigma_1\alpha\sigma_1.$$

$$\begin{aligned} \alpha\tau\alpha &= \alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\alpha & (3.6) \\ &= \sigma_2^{-1}\alpha\sigma_1\alpha\sigma_2 & (3.7) \\ &= \sigma_2^{-1}(\sigma_1\alpha\sigma_1)\sigma_2 & (3.8) \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1(\sigma_2\sigma_2^{-1})\alpha\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2) & (3.7) \\ &= \tau\alpha\tau & (3.6) \end{aligned}$$

On a donc, pour n'importe quelles deux arêtes  $\sigma$  et  $\sigma'$  avec un sommet en commun dans  $\Gamma'$ , que la relation

$$\sigma\sigma'\sigma = \sigma'\sigma\sigma'$$

est dans  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ .

– *nodale* :

Si  $\sigma, \sigma',$  et  $\sigma''$  dans  $\Gamma$  ont un seul sommet en commun et sont disposés dans le sens horaire, alors la relation nodale est dans  $R_\Gamma \subset R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Si  $\tau$  n'a pas de sommet qui est nœud, alors ce type de relation est satisfait. Alors, supposons qu'un sommet de  $\tau$  est un nœud. Sans perte de généralité, supposons que  $\tau \cap \sigma_1$  est un nœud.

Soient  $\alpha$ ,  $\tau$ , et  $\sigma_1$  trois arêtes du nœud disposées dans le sens horaire comme dans la Figure 18. Il va falloir utiliser la relation d'adjacence pour  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  :

$$(3.9) \quad \sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

On peut se servir aussi des relations 3.6, 3.7, et 3.8.

$$\begin{aligned} \alpha\tau\sigma_1\alpha &= \alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\sigma_1\alpha & (3.6) \\ &= \sigma_2^{-1}\alpha\sigma_1\sigma_2\sigma_1\alpha & (3.7) \\ &= \sigma_2^{-1}\alpha(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\alpha & (3.9) \\ &= (\sigma_2^{-1}\sigma_2)\alpha\sigma_1\alpha\sigma_2 & (3.7) \\ &= \sigma_1\alpha\sigma_1\sigma_2 & (3.8) \\ &= \sigma_1(\sigma_2\sigma_2^{-1})\alpha\sigma_1\sigma_2 \\ &= \sigma_1\sigma_2\alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2) & (3.7) \\ &= \sigma_1\sigma_2(\sigma_1^{-1}\sigma_1)\alpha\tau & (3.6) \\ &= \tau\sigma_1\alpha\tau \\ &= (\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1})\sigma_1\alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2) & (3.6) \\ &= \sigma_1(\sigma_2\sigma_2^{-1})\alpha\sigma_1\sigma_2 & (3.7) \\ &= \sigma_1\alpha\sigma_1\sigma_2(\sigma_1^{-1}\sigma_1) \\ &= \sigma_1\alpha\tau\sigma_1 \end{aligned}$$

D'après ces calculs, on retrouve les relation nodales,

$$\sigma\tau\sigma_1\sigma = \tau\sigma_1\sigma\tau = \sigma_1\sigma\tau\sigma_1$$

dans l'ensemble de relations  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ .

Maintenant soient  $\gamma$ ,  $\alpha$ , et  $\tau$  trois arêtes du nœud  $\tau \cap \sigma_1$  disposées dans le sens horaire comme dans la Figure 18. Il va falloir utiliser la relation nodale dans  $R_\Gamma$  :

$$(3.10) \quad \gamma\alpha\sigma_1\gamma = \alpha\sigma_1\gamma\alpha = \sigma_1\gamma\alpha\sigma_1$$

On peut se servir aussi des relations 3.6 et 3.7.

$$\begin{aligned} \gamma\alpha\tau\gamma &= \gamma\alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\gamma & (3.6) \\ &= \sigma_2^{-1}\gamma\alpha\sigma_1\gamma\sigma_2 & (3.7) \\ &= \sigma_2^{-1}(\alpha\sigma_1\gamma\alpha)\sigma_2 & (3.10) \\ &= \alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\gamma\alpha & (3.7) \\ &= \alpha\tau\gamma\alpha & (3.6) \\ &= \alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\gamma\alpha & (3.6) \\ &= \sigma_2^{-1}(\alpha\sigma_1\gamma\alpha)\sigma_2 & (3.7) \\ &= \sigma_2^{-1}(\sigma_1\gamma\alpha\sigma_1)\sigma_2 & (3.10) \\ &= \sigma_2^{-1}\sigma_1(\sigma_2\sigma_2^{-1})\gamma\alpha\sigma_1\sigma_2 \\ &= (\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2)\gamma\alpha(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2) & (3.7) \\ &= \tau\gamma\alpha\tau & (3.6) \end{aligned}$$

D'après ces calculs, on a retrouvé les relations nodales :

$$\gamma\alpha\tau\gamma = \alpha\tau\gamma\alpha = \tau\gamma\alpha\tau$$

dans l'ensemble de relations  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . En fait, on a démontré que tout relation nodale de  $R_{\Gamma'}$  se trouve dans  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ .

– *cyclique* :

La relation cyclique est vrai pour tout cycle de  $\Gamma$  car elle est contenue dans  $R_\Gamma \subset R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$ . Donc il suffit de considérer les pseudo-cycles irréductibles de  $\Gamma'$  contenant  $\tau$ . Or, on a supposé que  $\tau\sigma_1\sigma_2$  est le seul pseudo-cycle irréductible contenant  $\tau$ .

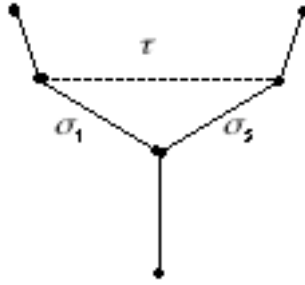
Donc, dans ce cas, la relation cyclique est réduite à la relation de triangle que l'on a vérifiée dans la relation 3.5.

Alors, on a démontré que les relations de  $R_{\Gamma'}$  sont dans  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$  ce qui nous donne que  $\langle X_{\Gamma'}, R_{\Gamma'} \rangle$  et  $\langle X_\Gamma, R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\} \rangle$  définissent le même groupe. On conclut

$$\langle X_{\Gamma'}, R_{\Gamma'} \rangle = \langle X_{\Gamma'}, R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\} \rangle = \langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle.$$

Donc si le théorème est vrai pour  $\Gamma'$ , il l'est pour  $\Gamma$  aussi.  $\square$

On rappelle la notation du Lemme 2. Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux arêtes voisines d'un graphe,  $\Gamma$ , qui ne font pas partie d'un cycle. Soit  $\Gamma' = \Gamma \cup \{\tau\}$  le graphe obtenu en ajoutant une arête  $\tau$  à  $\Gamma$  comme dans la Figure 15 reproduite ci-dessous :



$$\Gamma \text{ et } \Gamma' = \Gamma \cup \{\tau\}$$

On va démontrer que si le théorème est vrai pour  $\Gamma$ , c'est-à-dire  $B_\Gamma = \langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle$ , alors il est vrai pour  $\Gamma'$ .

*Démonstration.* On suppose que le théorème est vrai pour  $\Gamma$  décrit au-dessus. Alors  $B_\Gamma = \langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle$ . On considère une autre présentation de  $B_\Gamma$ ,  $\langle X_{\Gamma'}, R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\} \rangle$  obtenue par une transformation élémentaire de Tietze [5] [6]. On a vu dans la démonstration du Lemme 3 que les relations de  $R_{\Gamma'}$  sont des conséquences de  $R_\Gamma \cup \{\tau = \sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\}$  et donc que le théorème est vrai pour  $\Gamma'$ .  $\square$

Cela termine la Partie 3.2, et on continue par la démonstration du Théorème 16.

**3.3. Démonstration du Théorème 16.** On rappelle que dans le papier de Sergiescu, il s'agit toujours de graphes connexes, planaires, localement finis, sans boucles. On commence la démonstration par le cas d'un arbre fini par récurrence sur la valence réduite.

*Démonstration. Le cas d'un arbre fini :*

Soit  $\Gamma$  un arbre fini à  $n$  sommets. Si la valence réduite est égal à zero, alors  $\Gamma$  est un  $n - arc$  et on se trouve dans le cas de la présentation d'Artin. Supposons d'abord que  $\Gamma$  est un arbre fini tel que  $v(\Gamma) = p > 0$  et que le théorème est vrai pour tout arbre à valence inférieure à  $p$ .

Soit  $v_0$  une extrémité de  $\Gamma$  qui existe d'après la Proposition 10. En parcourant l'arbre à partir de  $v_0$  comme vu dans la Figure 19 ci-dessous, on arrive à un nœud.

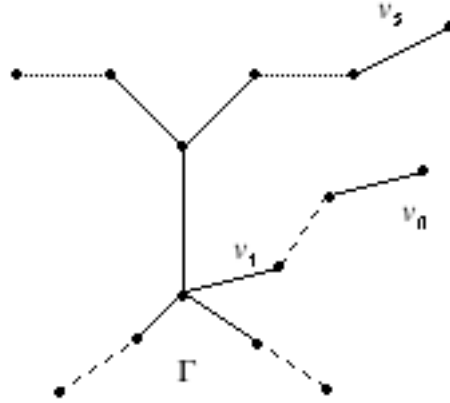


Figure 19.

En effet, sinon, comme le graphe est fini, on est dans le cas de  $v(\Gamma) = 0$ . Appelons  $v_1$  le sommet précédant le premier nœud. On continue à parcourir en tournant à droite à chaque nœud. On arrive à un sommet libre. En effet, sinon, comme il y a un nombre fini de sommets, on tomberait sur un sommet par lequel on a déjà passé, ce qui ferait un circuit. Appelons ce sommet  $v_2$ .

On va construire un graphe,  $\Gamma_1$ , tel que  $v(\Gamma_1) < v(\Gamma)$ , et donc par l'hypothèse de récurrence, le théorème est vrai pour  $\Gamma_1$ . On remplace l'arête qui joint  $v_1$  au nœud par une arête entre  $v_1$  et  $v_2$  comme dans la Figure 20 ci-dessous.

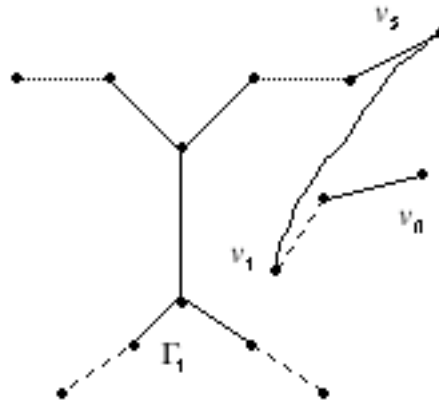


Figure 20.

Le Lemme 2 dit que le théorème restera vrai pour  $\Gamma_2$ , obtenu en ajoutant une arête entre  $v_1$  et le sommet voisin de  $v_2$ , vu dans la Figure 21 ci-dessous.

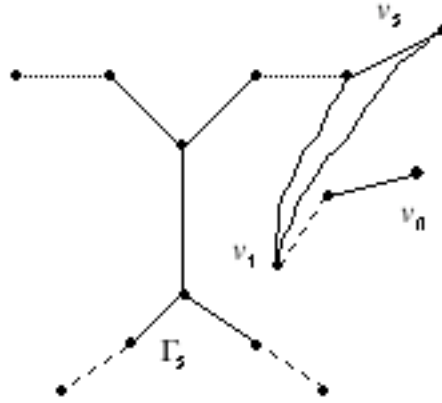


Figure 21.

Le Lemme 3 implique que le théorème restera vrai si l'on efface l'arête entre  $v_1$  et  $v_2$  dans  $\Gamma_2$  pour obtenir le graphe  $\Gamma_3$  dans la Figure 22.

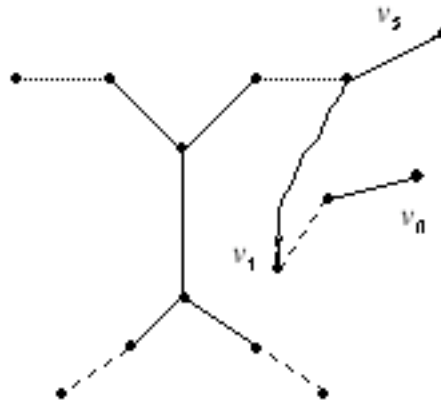


Figure 22.

$\Gamma_3$

Si l'on continue de même en appliquant les Lemmes 2 et 3, on arrivera au résultat que le théorème est vrai pour l'arbre initial,  $\Gamma$ .  $\square$

On continue par le cas d'un graphe fini en faisant la démonstration par récurrence sur la complexité, pour laquelle l'étape de base où  $b(\Gamma) = 0$  est le cas d'un arbre fini.

*Démonstration. Le cas d'un graphe fini :*

Soit  $\Gamma$  un graphe. On procède par récurrence sur la complexité. Si  $b(\Gamma) = 0$ , alors,  $\Gamma$  est un arbre. Supposons que le théorème est vrai pour chaque graphe à complexité inférieure à  $p$ , et soient  $\Gamma$  tel que  $b(\Gamma) = p$  et  $\sigma_1$  une arête qui borde un seul pseudo-cycle.

On considère le graphe  $\Gamma_1 = \Gamma - \{\sigma_1\}$ . Alors,  $b(\Gamma_1) = p - 1$ ; donc le théorème est vrai pour  $\Gamma_1$ , et  $\langle X_{\Gamma_1}, R_{\Gamma_1} \rangle$  est une présentation de  $B_{\Gamma_1}$ . On fait une transformation élémentaire de Tietze pour avoir une nouvelle présentation de  $B_{\Gamma_1}$ ,  $\langle X_{\Gamma_1}, R_{\Gamma_1} \cup \{\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n\} \rangle$ . Le Lemme 1 démontre que la tresse associée

à  $\sigma_1$  vérifie cette relation dans  $B_\Gamma$ . Comme avant, on en déduit que les relations dans  $R_\Gamma$  sont des conséquences de  $R_{\Gamma_1} \cup \{\sigma_1 \dots \sigma_{n-1} = \sigma_2 \dots \sigma_n\}$ .  $\square$

On a fait le cas d'un arbre et puis d'un graphe fini. Alors traitons le cas d'un graphe infini. D'abord, on considère ce que signifie le groupe de tresses engendré par un graphe infini. Soient  $\Gamma$  un graphe infini et  $S = S(\Gamma)$ . On rappelle que l'on considère des graphes localement finis. C'est-à-dire tels que chaque disque borné dans le plan contient un nombre fini d'arêtes. Alors, pour tout disque ouvert,  $D_r$ , relativement compact de rayon  $r$ ,  $S \cap D_r$  est un ensemble fini de sommets de  $\Gamma$ . Soit  $B_{D_r, S \cap D_r}$  le groupe de tresses relatif à l'ouvert  $D_r$ . On définit

$$B_\Gamma = B_S = \lim_{r \rightarrow \infty} B_{D_r, S \cap D_r}$$

*Démonstration. Le cas d'un graphe infini :*

Soient  $D_1 \subset D_2 \subset \dots$  une suite de disques telle que  $\cup D_i = \mathbb{R}^2$  et  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \dots$  une suite croissante de sous-graphes connexes finis pleins (i.e. une partie des sommets et toutes les arêtes entre les sommets) telle que  $\Gamma_i$  est un sous-graphe maximal de  $\Gamma \cap D_i$ . Alors,

$$B_\Gamma = \lim_D B_{\Gamma_i}.$$

Encore, on a  $X_\Gamma$ , le groupe libre de générateurs associés aux arêtes de  $\Gamma$ . On constate que toute relation fait intervenir un nombre fini de générateurs. Comme ces générateurs sont inclus dans un groupe  $B_{\Gamma_i}$ , la relation est vraie dans ce  $R_{\Gamma_i}$  et a fortiori dans  $R_\Gamma$ . Dès lors,  $B_\Gamma = \langle X_\Gamma, R_\Gamma \rangle$ .  $\square$

#### 4. LES COROLLAIRES

Les implications de ce théorème sont importantes. On a démontré que tout graphe ayant même sommets définit le même groupe de tresses. En fait, on a le corollaire suivant :

**Corollaire 17.** *Tous les graphes finis ayant le même nombre de sommets engendrent le groupe de tresses.*

*Démonstration.* En effet, si  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont deux graphes ayant le même nombre de sommets, alors les ensembles de sommets,  $S(\Gamma)$  et  $S(\Gamma')$  sont isomorphes. Cela implique

$$B_\Gamma = B_{S(\Gamma)} \simeq B_{S(\Gamma')} = B_{\Gamma'}.$$

$\square$

Le corollaire 0.2 de Sergiescu nous donne aussi des informations sur les automorphismes du groupe de tresses :

**Corollaire 18.** *Les groupes de tresses  $B_{n+1}$  et  $B_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$  admettent des automorphismes d'ordre  $n$ .*

*Démonstration.* On considère les automorphismes induits par des rotations de  $\frac{2\pi}{n}$  sur la Figure 23 suivante :

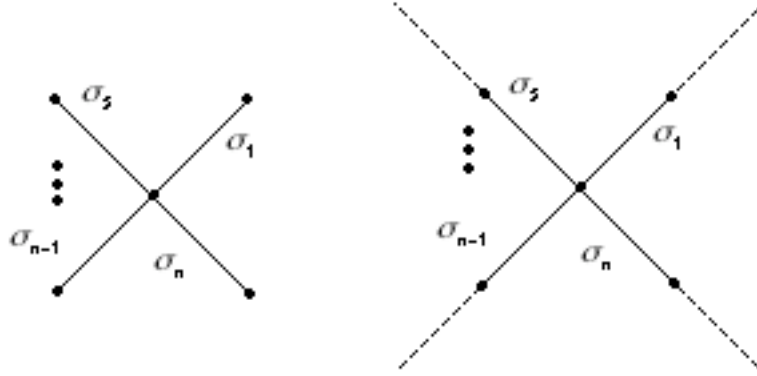


Figure 23.

□

En fait dans le cas fini, on peut généraliser ce corollaire pour obtenir le Corollaire 19 suivant :

**Corollaire 19.** *Le groupe de tresse,  $B_{n+1}$  admet les automorphismes d'ordre  $d$  pour chaque diviseur  $d$  de  $n$ .*

*Démonstration.* Soit  $d$  un diviseur de  $n$ . Soit  $m \in \mathbb{Z}$  tel que  $n = dm$ . Il suffit de considérer les automorphismes induits par des rotations de  $\frac{2\pi}{d}$  sur la Figure 24 suivante :

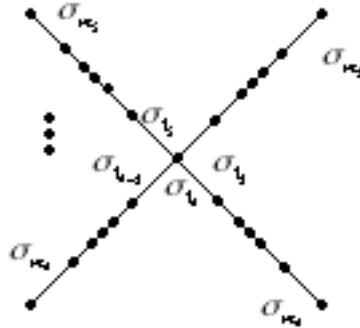


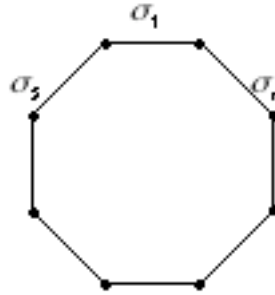
Figure 24.

□

On termine notre discussion sur les automorphismes avec le Corollaire ?? suivant :

**Corollaire 20.** *Le groupe de tresse,  $B_{n+1}$  admet les automorphismes d'ordre  $d'$  où  $d'$  divise  $n + 1$ .*

En effet, on considère le graphe :



et on voit qu'une rotation de degré  $\frac{2\pi}{m}$  où  $n + 1 = d'm$  est un automorphisme d'ordre  $d'$ .

Je termine avec une conséquence surprenante. Soit  $\Gamma$  un  $n$ -arc infini tel que l'ensemble de sommets est borné dans  $\mathbb{R}^2$ . Intuitivement, on peut prendre un brin et encercler tous les autres pour terminer au point directement en-dessous du sommet de départ. Si le résultat de Fadess et Neuwirth était vrai dans le cas infini, cela serait possible. Visuellement, on imagine ce brin comme dans la Figure 25.

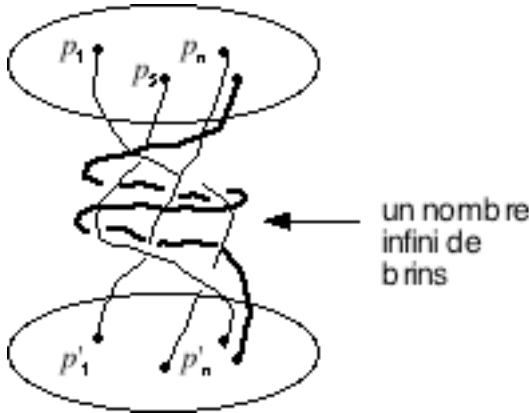


Figure 25.

Cependant, si on considère le  $n$ -arc infini,  $\Gamma_A$ , comme dans la présentation d'Artin, le fait que l'on puisse faire la même chose n'est pas évident. En effet, on considère la présentation d'Artin dans  $\mathbb{R}^3$ . Le  $n$ -arc est une ligne,  $(x, 0, 1)$ , et les brins tombent des sommets,  $(n, 0, 1)$  où  $n \in \mathbb{Z}$  et qui se croisent dans  $\mathbb{R}^3$  pour arriver aux points d'arriver  $(n, 0, 1)$  directement en-dessous. Comme un brin est homéomorphe à  $[0, 1]$ , son chemin dans  $\mathbb{R}^3$  doit être borné. Donc comment peut-on encercler tous les brins avec un seul brin quand la placement des brins n'est pas borné ?

On considère le  $n$ -arc,  $\Gamma_{A_b}$ , suivant : on choisit l'arête  $\sigma_0$  dans  $\Gamma_A$  avec sommets  $(0, 0, 1)$  et  $(1, 0, 1)$ . On note  $\sigma_j^+$  l'arête avec sommets  $(j, 0, 1)$  et  $(j + 1, 0, 1)$  et  $\sigma_j^-$  l'arête avec sommets  $(-j + 1, 0, 1)$  et  $(-j, 0, 1)$  pour  $j \in \mathbb{N}^*$ . On forme  $\Gamma_{A_b}$  en prenant chaque  $\sigma_j^+$  et  $\sigma_j^-$ , et on réduit la longueur de l'arête par  $\frac{1}{2^j}$ . On a  $\Gamma_{A_b}$  comme dans la Figure 26.

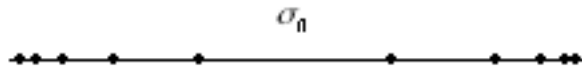


Figure 26.

Alors  $\Gamma_{A_b}$  est donc borné de longueur 3 et isomorphe à  $\Gamma_A$ . Intuitivement, on pourrait prendre un brin pour encercler les autres brins, mais si on essaie de l'écrire en utilisant un nombre fini de générateurs, on voit que ceci n'est pas possible. Ainsi, on a un exemple de pourquoi un brin intuitif selon Fadell et Neuwirth ne marche pas dans le cas infini, ou bien un exemple de pourquoi il faut que  $n$  soit fini pour appliquer le résultat de Fadell et Neuwirth.

#### RÉFÉRENCES

- [1] Emil Artin, *Theorie der zöpfe*, Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **4** (1947), 47–72.
- [2] Patrick Dehornoy, *Braids and self-distributivity (progress in mathematics)*, Birkhauser Verlag AG, 2000.
- [3] Edward Fadell and Lee Neuwirth, *Configuration spaces*, Math. Scand. **10** (1962), 111–118. MR MR0141126 (25 #4537)
- [4] Elon Lages Lima and Jonas Gomes, *Fundamental groups and covering spaces*, AK Peters, 2003.
- [5] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag GmbH, 1977.
- [6] Wilhelm Magnus, Abraham Karrass, and Donald Solitar, *Combinatorial group theory : Presentations of groups in terms of generators and relations (pure and applied mathematics, xviii)*, Interscience, 1966.
- [7] Vlad Sergiescu, *Graphes planaires et présentations des groupes de tresses*, Math. Z. **214** (1993), no. 3, 477–490. MR MR1245207 (95j :20034)
- [8] W. T. Tutte, *Graph theory (encyclopedia of mathematics and its applications)*, Addison-Welsey Publishing Company, 1984.

*E-mail address:* kgracekennedy@alumni.sewanee.edu