

TEMPERLEY-LIEB ALGEBRAS ASSOCIATED TO THE ROOT SYSTEM D

K. GRACE KENNEDY
SOUS LA DIRECTION DE F. DIGNE

2008

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Les notions de base	2
2.1. Système de Coxeter	2
2.2. Les graphes de Coxeter	3
2.3. Les classes de conjugaison d'un groupe de Coxeter	4
2.4. L'algèbre de Hecke	5
3. Les algèbres de Temperley-Lieb de types ADE	6
3.1. La définition de l'algèbre de Temperley-Lieb	6
3.2. $T_d(S, m)$ est non nul	8
4. La structure de TD_n	13
4.1. La relation avec TA_{n-1}	14
4.2. La relation avec TB_n	15
4.3. TD_n comme noyau d'une suite exacte	17
5. L'algèbre du graphe D_n	20
6. L'algèbre $T'D_n$	24
6.1. La proposition 3.2 de tom Dieck	24
6.2. Les modules simples de $T''D_n$	27
7. Remerciements	29
Références	29

1. INTRODUCTION

Le sujet de ce mémoire est l'article de Tammo tom Dieck, *Temperley-Lieb algebras associated to the root system D* qui apparait dans *Archiv der Mathematik* en 1998 [8]. Dans la première partie, tom Dieck définit les algèbres de Hecke et de Temperley-Lieb, $T_d(S, m)$, de type ADE associées à un système de Coxeter. L'algèbre de Temperley-Lieb est définie d'abord par sa présentation et puis comme un quotient de l'algèbre de Hecke. Après, il démontre que l'algèbre de Temperley-Lieb est non nulle en donnant deux $T_d(S, m)$ -modules non nuls.

La Partie 1 de Tammo tom Dieck est traitée dans les Parties 2 et 3 de ce mémoire. Les notions de base nécessaires pour ce mémoire sont compris dans la Partie 2. On verra quelques définitions fondamentales, les exemples, et les résultats importants par la suite. Puis nous allons définir l'algèbre de Temperley-Lieb dans la Partie 3 et voir qu'elle est non nulle.

Dans la Partie 2 [8], tom Dieck donne la structure de TD_n , l'algèbre de Temperley-Lieb associée au système de racines de type D_n . La Partie 2 de [8] correspond aux Parties 4 et 5 de ce mémoire. Tammo tom Dieck utilise les algèbres de Temperley-Lieb, TA_n et $T'D_n$ associé au système de racine de type A_n et à une variante de de type B_n . On a TD_n comme la somme directe de TA_n et un idéal et aussi comme le noyau d'une suite exacte. Dans cette partie, on corrige plusieurs fautes de frappe et de mathématiques de Tammo tom Dieck dans les démonstrations de ces identifications. Aussi dans la Partie 2, Tammo tom Dieck fait quelques réflexions sur l'algèbre de Hecke et le groupe de tresse associé au système de racines de type D_n .

Dans la Partie 3 de [8], tom Dieck cherche la structure de $T''D_n$ et $T'D_n$ en essayant de comprendre leur modules simples. Il se sert souvent de son travail de *Symmetrische Brücken und Knotentheorie zu den Dynkin-Diagrammen vom Typ B* [7] et de son livre

qu'il écrivit avec Theodor Bröcker, Représentations of Compact Lie Groupes [2]. Dans la Partie 6, on fait des démonstrations du Lemme 35 et de la Proposition 34 plus algébriques qu'il ne fit en [2].

2. LES NOTIONS DE BASE

Le but de cette partie est de comprendre les structures de base pour définir l'algèbre de Temperley-Lieb. Dans la Partie 2.1, on définit un groupe de Coxeter par sa présentation. On peut définir les algèbres de Temperley-Lieb et de Hecke directement à partir d'un groupe de Coxeter. Ou bien cela revient au même de définir l'algèbre de Temperley-Lieb comme quotient d'une algèbre de Hecke. Un groupe de Coxeter peut être défini aussi par son graphe de Coxeter que nous verrons dans la Partie 2.2 avec les exemples importants pour la suite des groupes de Coxeter de types ADE et B.

L'algèbre de Hecke est définie par son groupe de Coxeter avec certains paramètres qui dépendent des classes de conjugaison du groupe de Coxeter. Nous allons étudier les classes de conjugaison dans la Partie 2.3. Cela nous amène à la définition de l'algèbre de Hecke dans la Partie 2.4 que l'on utilisera dans la Partie 3 suivante pour définir l'algèbre de Temperley-Lieb.

2.1. Système de Coxeter. Toutes les algèbres que l'on étudiera dans le papier de Tammo tom Dieck sont définies à partir d'un groupe de Coxeter. Un groupe de Coxeter est un groupe défini d'après sa présentation, où les relations sont définies par une matrice qui suit certaines conditions. On commence immédiatement avec cette définition donnée par tom Dieck [8] et quelques définitions soutenantes.

Définition 1. Soit S un ensemble fini. Une matrice de Coxeter est une matrice symétrique telle que les composantes $m_{s,t}$ sont dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, et ils suivent les règles :

- (1) $m_{s,s} = 1$
- (2) $m_{s,t} = m_{t,s} \geq 2$ pour $s \neq t$.

Un groupe de Coxeter, W , est le groupe qui a comme présentation :

- Générateurs : s avec $s \in S$
- Relations : $(st)^{m_{s,t}} = 1$ pour tout $s, t \in S$ tels que $m_{s,t} \neq \infty$

On appelle (W, S) , un système de Coxeter.

On constate que l'égalité (2) est équivalente au fait que la matrice soit symétrique. Aussi, la condition que $m_{s,s} = 1$ implique que tout générateur est d'ordre deux. Aussi on a que $m_{s,t}$ est l'ordre de (st) et que $s \neq 1$ pour tout s dans S . Cette dernière relation est équivalente à une relation importante que l'on appellera la *relation de tresse* :

$$\underbrace{sts \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}} = \underbrace{tst \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}}$$

On pourrait également définir un groupe de Coxeter et puis trouver sa matrice symétrique à partir des relations données, ce qui est l'approche chez Bourbaki [1]. L'Exemple 2 est un exemple fondamental d'un groupe de Coxeter.

Exemple 2. Le groupe symétrique sur n éléments, noté S_n , est un groupe de Coxeter où S est égal aux transpositions de la forme $s_i = (i, i + 1)$ où $s \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$. Alors, S a $n - 1$ éléments, et il engendre S_n . Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} s_i^2 &= 1 \\ s_i s_j &= s_j s_i \quad | \quad i - j | \geq 2 \end{aligned}$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}.$$

Le groupe symétrique sur n éléments est un groupe de Coxeter de type A_{n-1} .

Comme chaque s_i ne commute ni avec s_{i+1} ni avec s_{i-1} s'ils existent (et il y a toujours un des deux qui existe pour $i \geq 1$). Donc il n'y a aucun élément de S qui commute avec tout autre élément de S . Cela nous amène à la Définition 3 suivante.

Définition 3. Un système de Coxeter, (W, S) , est dit irréductible s'il n'y a pas de sous-ensembles S_1 et S_2 de S tels que $S = S_1 \cup S_2$, et pour tous $s \in S_1$ et $t \in S_2$, $st = ts$.

D'après la Proposition 8 de Chapitre IV du Bourbaki [1], si l'on note W_{S_1} et W_{S_2} les sous-groupes engendrés par S_1 et S_2 respectivement, alors $W = W_{S_1} \oplus W_{S_2}$. Réciproquement, si l'on a que W est la somme directe de deux sous-groupes engendrés par deux sous-ensembles de S , ces sous-ensembles forment une partition qui soumet aux conditions de la définition précédente. Donc on peut aussi voir un système de Coxeter irréductible comme un groupe de Coxeter qui ne peut pas être décomposé en somme directe de sous-groupes engendrés par des sous-ensembles de S .

On revient à l'Exemple 2. La remarque juste après cet exemple implique qu'il n'y a pas deux sous-ensembles de S , S_1 et S_2 , tel que $S_1 \cup S_2 = S$ et $st = ts$ pour tous $s \in S_1$ et $t \in S_2$. On a donc que le groupe symétrique est un exemple d'un groupe de Coxeter irréductible. On verra dans la Partie 2.2 que cette définition est équivalent à celle donnée par Bourbaki [1].

2.2. Les graphes de Coxeter. On a un *graphe de Coxeter* associé à un groupe de Coxeter. Les sommets du graphe sont indexés par les éléments de S , et on les jointe avec les arêtes qui signifient la valeur des $m_{s,t}$. Deux sommets, s et t , sont liés par une seule arête si $m_{s,t} = 3$, deux arêtes si $m_{s,t} = 4$. Si $m_{s,t} \geq 5$, on met l'étiquette $m_{s,t}$ au-dessus de l'arête. On reprend le cas du groupe symétrique de l'Exemple 2.

Exemple 4. Chaque $m_{s_i, s_j} = 2$ si $|i - j| \geq 2$ et $m_{s_i, s_j} = 3$ si $|i - j| = 1$. Cela donne un graphe connexe que l'on appelle un $n - 1$ -arc. Voir la Figure 1.



Figure 1.

On dit aussi que c'est un groupe de Coxeter de type A_{n-1} où $n - 1$ est égal au nombre de sommets.

Chez Bourbaki, un système de Coxeter irréductible est un groupe de Coxeter tel que son graphe soit connexe. Cette définition est équivalente à la Définition 3. En effet, si un graphe de Coxeter n'est pas connexe, on a deux sous-ensembles d'éléments de S , S_1 , S_2 , tels que pour chaque $s \in S_1$ et $t \in S_2$, $m_{s,t} = 2$. C'est à dire, s et t commutent. On a aussi que $S = S_1 \cup S_2$. Inversement, si un groupe de Coxeter n'est pas irréductible, alors il existe une partition de S , $S_1 \cup S_2$, telle que pour chaque $s \in S_1$ et $t \in S_2$, $st = ts$. C'est à dire, $m_{s,t} = 2$. Dans ce cas, son graphe de Coxeter à deux composantes qui correspondent à S_1 et S_2 et qui sont disjoints. Cette argumentation nous donne la Proposition 5 suivante.

Proposition 5. Un groupe de Coxeter (W, S) est irréductible si et seulement si son graphe de Coxeter est connexe.

Dans le Chapitre 6 du Bourbaki [1], ils démontrent la classification des groupes de Coxeter finis irréductibles, ce qui nous donne une classification de tout groupe de Coxeter

fini. Nous intéresserons plutôt aux groupes de Coxeter de type ADE et B. Un groupe de Coxeter de type ADE est un groupe de Coxeter connexe et fini où $m_{s,t} \in \{1, 2, 3\}$. On a vu dans l'Exemple 2 et 4, un exemple de type A_{n-1} .

Un groupe de Coxeter de type D_n est un groupe de Coxeter avec $|S| = n$, et

$$\begin{aligned} m_{s_0, s_1} &= 2 \\ m_{s_0, s_2} &= 3 \\ m_{s_i, s_j} &= 2 \text{ si } |i - j| \geq 2, i, j \geq 1 \\ m_{s_i, s_j} &= 3 \text{ si } |i - j| = 1, i, j \geq 1 \end{aligned}$$

Donc son graphe de Coxeter sera similaire au graphe de type A_{n-1} , sauf une petite différence vers la fin de de l'arc. Au lieu d'un $n - 1$ -arc, on aura un $n - 1$ -arc avec une branche à un sommet attachée au deuxième sommet comme vu dans la Figure 2 suivante.

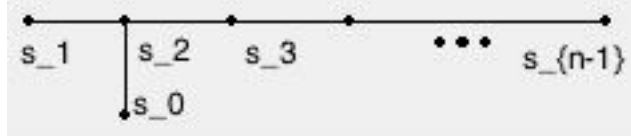


Figure 2.

Un groupe de Coxeter de type E est un groupe de Coxeter fini, irréductible à six, sept, ou huit générateurs. Son graphe est similaire au graphe de type D_n , sauf que la branche à un sommet est attachée au troisième sommet de la fin.

Il y a encore un autre type de groupe de Coxeter qui nous intéressera : celui de type B_n . C'est un groupe de Coxeter avec n générateurs dans S , et

$$\begin{aligned} m_{s_0, s_1} &= 4 \\ m_{s_i, s_j} &= 2 \text{ si } |i - j| \geq 2 \\ m_{s_i, s_j} &= 3 \text{ si } |i - j| = 1, i, j \geq 1 \end{aligned}$$

Ceci donne un graphe de la forme suivante représenté dans la Figure 3 suivante :

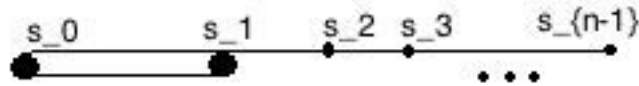


Figure 3.

Le but de l'article de tom Dieck est de comprendre la structure de l'algèbre de Temperley-Lieb associée à un groupe de Coxeter de type D_n . (On définira l'algèbre de Temperley-Lieb dans la Partie 3.1.) On utilisera les algèbres de Temperley-Lieb associées aux groupes de Coxeter de types A_{n-1} et B_n pour comprendre cette structure. On peut voir qu'il y a un graphe de type A_{n-1} qui apparaît dans un graphe de type D_n . Aussi, on peut faire une comparaison entre les graphes de types D_n et B_n en voyant qu'ils ont le même nombre de sommets et qu'ils ressemblent à un $n - 1$ -arc et un n -arc sauf à la fin où il y a une anomalie. Ceci n'est qu'une idée visuelle de pourquoi tom Dieck cherchera à retrouver les informations sur l'algèbre de Temperley-Lieb de type D_n chez les celles de types A_{n-1} et B_n .

2.3. Les classes de conjugaison d'un groupe de Coxeter. Dans l'étude des groupes de Coxeter, il est important de comprendre les classes de conjugaison pour pouvoir définir les algèbres de Hecke et de Temperley-Lieb.

Proposition 6. Soient (W, S) un groupe de Coxeter fini et Γ son graphe de Coxeter. Les classes de conjugaison de S sont en bijection avec les composantes connexes du graphe Γ' obtenu en effaçant dans Γ les arêtes ayant une étiquette paire. C'est à dire, deux éléments

de S sont conjugués si et seulement si ils sont liés par des arêtes ayant une étiquette impaire.

Démonstration. Soient Γ le graphe de Coxeter de (W, S) et Γ' le graphe obtenu en effaçant dans Γ les arêtes ayant une étiquette paire.

Soient $s, t \in S$ tels que $m_{s,t}$ soit impaire. Alors, $m_{s,t} = 2k+1$ et $\underbrace{\dots sts \dots t(s)}_{k \text{ fois}} \underbrace{t \dots sts \dots}_{k \text{ fois}} = \dots \underbrace{tst \dots s(t)}_{k \text{ fois}} \underbrace{s \dots tst \dots}_{k \text{ fois}} \dots$. En multipliant à gauche des deux côtés par $\underbrace{t \dots sts \dots}_{k \text{ fois}}$, l'inverse de $\dots \underbrace{stst \dots t}_{k \text{ fois}}$, et à droite par $\dots \underbrace{stst \dots t}_{k \text{ fois}}$, l'inverse de $\underbrace{t \dots sts \dots}_{k \text{ fois}}$, on retrouve

$$s = \underbrace{tst \dots s(t)}_{2k \text{ fois}} \underbrace{s \dots tst}_{2k \text{ fois}}.$$

Comme l'inverse de $\underbrace{tst \dots s}_{2k \text{ fois}}$ est égal à $\underbrace{s \dots tst}_{2k \text{ fois}}$, on a que si $m_{s,t}$ est impaire, s et t sont conjugués. Ceci implique que si s et t sont liés par une suite d'arêtes ayant une étiquette impaire, ils sont conjugués par la transitivité de conjugaison. Autrement dit, s'ils sont dans la même composante connexe de Γ' , s et t sont conjugués.

Il reste à voir que si $m_{s,t}$ est pair, alors s et t ne sont pas conjugués. On prend le quotient de S par la relation d'équivalence : s est équivalent à s' si et seulement si s et s' sont dans la même composante connexe de Γ' , c'est à dire s'ils sont liés par un chemin fini (y compris un chemin de longueur zéro) d'arêtes ayant toutes des étiquettes impaires. Soit X l'ensemble des ces classes de conjugaison.

On définit une application de S dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$:

$$\begin{aligned} \gamma : S &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X \\ s &\longmapsto (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{*}, 0, \dots) \text{ où } * \text{ correspond à la classe d'équivalence de } s. \end{aligned}$$

Les $\gamma(s)$ respectent les relations de tresse. En effet, si $m_{s,t}$ est impair, s et t sont envoyé sur le même élément dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$. Si $m_{s,t}$ est pair, alors comme $\gamma(s)$ et $\gamma(t)$ commutent et comme ils sont chacun d'ordre 2, on a $(\gamma(s)\gamma(t))^{m_{s,t}} = \gamma(s)^{m_{s,t}}\gamma(t)^{m_{s,t}} = 1$. Donc comme γ respecte les relations du groupe de Coxeter, il définit une application de W dans $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^X$. Si $m_{s,t}$ est pair, alors $\gamma(s)$ et $\gamma(t)$ ne sont pas conjugués. Donc ce n'est pas possible qu'ils soient dans W [3]. \square

On peut appliquer ce résultat aux groupes de Coxeter. Cela nous intéressera dans la suite.

Corollaire 7. *Pour tout groupe de Coxeter de type ADE, (W, S) , S n'a qu'une classe de conjugaison.*

Démonstration. Ceci découle directement de la Proposition 6 et du fait que $m_{s,t}$ est impaire pour tout s et t dans S . \square

Corollaire 8. *Soit (W, S) un groupe de Coxeter de type B_n . Alors, S a deux classes de conjugaison : une classe à $n - 1$ éléments, s_1, \dots, s_{n-1} et une classe à un élément, s_0 .*

2.4. L'algèbre de Hecke. Notre discussion précédente nous permet de définir l'algèbre de Hecke. Soit \mathfrak{H} un anneau commutatif et (W, S) un groupe de Coxeter. Pour tout s dans S , on se donne q_s dans \mathfrak{H} tel que $q_s = q_t$ si et seulement si s et t sont conjugués.

Définition 9. L'algèbre de Hecke de W avec paramètres q_s dans \mathfrak{H} est l'algèbre unitaire sur \mathfrak{H} engendré par

$$\{T_s | s \in S\}$$

où T_1 est l'élément neutre de l'algèbre de Hecke. L'algèbre de Hecke a comme relations

$$\underbrace{T_s T_t T_s \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}} = \underbrace{T_t T_s T_t \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}} \quad \text{les relations de tresse}$$

$$T_s^2 = (q_s - 1)T_s + q_s T_1 \quad \text{la relation quadratique}$$

On notera l'algèbre de Hecke $H_{\mathfrak{H}}(W, (q_s))$.

On constate que les générateurs de l'algèbre de Hecke ont des inverses que l'on obtient de la relation quadratique, $T_s^{-1} = \frac{T_s + 1 - q_s}{q_s}$. En effet, $T_s T_s^{-1} = \frac{T_s(T_s + 1 - q_s)}{q_s} = \frac{T_s^2 + T_s - q_s T_s}{q_s} = \frac{(q_s - 1)T_s + q_s + T_s - q_s T_s}{q_s} = 1$.

La discussion de la Partie 2.3 nous donne une façon facile de voir les classes de conjugaison du graphe directement (et donc de la présentation) d'un groupe de Coxeter. Ceci nous permet d'identifier quels q_s sont égaux.

Proposition 10. Si (W, S) est un groupe de Coxeter de type ADE, alors tout q_s sont égaux.

La Proposition 10 donne du sens à la notation de tom Dieck pour l'algèbre de Hecke, $H_q(S, m)$ où m est la fonction de $S \times S$ qui donne $m_{s,t}$. Nous constatons que pour l'algèbre de Hecke de type B_n , il faut donner deux q_s pour les deux classes de conjugaison.

3. LES ALGÈBRES DE TEMPERLEY-LIEB DE TYPES ADE

On définit l'algèbre de Temperley-Lieb associée à un groupe de Coxeter de type ADE à partir de son algèbre de Hecke. Soient (W, S) un groupe de Coxeter de type ADE et \mathfrak{H} un anneau commutatif. Notons $H_q(S, m)$ son algèbre de Hecke. On se rappelle que le fait d'être ADE revient à la même condition que la fonction m prend sa valeur dans $\{1, 2, 3\}$. Dans la Partie 3.1, nous allons définir l'algèbre de Temperley-Lieb, et dans la Partie 3.2, nous vérifierons qu'elle est non nulle.

3.1. La définition de l'algèbre de Temperley-Lieb. Comme dans l'article de tom Dieck, on définira l'algèbre de Temperley-Lieb, $T_d(S, m)$ pour $d \in \mathfrak{H}^*$, d'abord par sa présentation et après comme un quotient de $H_q(S, m)$ [8].

Définition 11. L'algèbre de Temperley-Lieb d'un groupe de Coxeter (W, S) est l'algèbre unitaire, associative sur \mathfrak{H} aux générateurs $\{e_s | s \in S\}$ et les relations

$$\begin{aligned} e_s^2 &= d e_s & d &\in \mathfrak{H} \\ e_s e_t &= e_t e_s & m_{s,t} &= 2 \\ e_s e_t e_s &= e_s & m_{s,t} &= 3. \end{aligned}$$

On la note $T_d(S, m)$.

Pour pouvoir définir l'algèbre de Temperley-Lieb comme le quotient de l'algèbre de Hecke, nous prenons quelques conditions sur q et d :

$$p \in \mathfrak{H}, \quad q = p^2, \quad d = p + p^{-1}.$$

Définition 12. L'algèbre de Temperley-Lieb, noté $T_d(S, m)$, est égal à $H_q(S, m)/I$ où $I = \langle x(s, t) = T_s T_t T_s + T_s T_t + T_t T_s + T_s + T_t + 1 | m_{s,t} = 3 \rangle$ est un idéal bilatère.

Proposition 13. En soumettant q et d aux conditions précédentes, les Définitions 11 et 12 de l'algèbre de Temperley-Lieb sont équivalentes.

La Proposition 13 résulte directement du Lemme 14 suivant qui correspond à la Proposition 1.4 de tom Dieck [8].

Lemme 14. *On prend les hypothèses précédentes sur p , q , et d . Définissons φ :*

$$\begin{aligned} \varphi : H_q(S, m) &\longrightarrow T_d(S, m) \\ T_s &\longmapsto pe_s - 1. \end{aligned}$$

Alors, φ est un homomorphisme surjectif dont son noyau est l'idéal bilatère I engendré par les $x(s, t)$ où (s, t) parcourt les paires d'éléments de S tels que $m_{s,t} = 3$.

Démonstration. D'abord il faut voir que φ respecte les relations de l'algèbre de Hecke. On commence par la relation quadratique.

$$\begin{aligned} \varphi(T_s^2) &= \varphi((q-1)T_s + q) \\ &= (q-1)(pe_s - 1) + q \\ &= (p^2 - 1)(pe_s - 1) + p^2 \\ &= p^3e_s - pe_s - p^2 + 1 + p^2 \\ &= p^3e_s - pe_s + 1 \\ &= p^3e_s + pe_s - 2pe_s + 1 \\ &= p^2(p + p^{-1})e_s - 2pe_s + 1 \\ &= p^2(de_s) - 2pe_s + 1 \\ &= p^2(e_s^2) - 2pe_s + 1 \\ &= (pe_s - 1)^2 \\ &= \varphi(T_s)^2 \end{aligned}$$

Donc φ respecte la relation quadratique. On vérifie la relation de tresse. Soient s et t dans S tels que $m_{s,t} = 3$.

$$\begin{aligned} \varphi(T_s T_t T_s) &= (pe_s - 1)(pe_t - 1)(pe_s - 1) \\ &= (p^2e_s e_t - pe_t - pe_s + 1)(pe_s - 1) \\ &= p^3e_s e_t e_s - p^2e_t e_s - p^2e_s^2 + pe_s - p^2e_s e_t + pe_t + pe_s - 1 \\ &= p^3e_s - p^2(p + p^{-1})e_s + pe_s - p^2e_t e_s - p^2e_s e_t + pe_s + pe_t - 1 \\ &= (p^3 - p^3 - p + p)e_s - p^2e_t e_s - p^2e_s e_t + pe_s + pe_t - 1 \\ &= -p^2e_t e_s - p^2e_s e_t + pe_s + pe_t - 1 \end{aligned}$$

Comme $\varphi(T_s T_t T_s)$ est symétrique en s et t , φ respecte la relation de tresse pour $m_{s,t} = 3$. Soient s et t dans S tels que $m_{s,t} = 2$.

$$\begin{aligned} \varphi(T_s T_t) &= (pe_s - 1)(pe_t - 1) \\ &= (p^2e_s e_t - pe_t - pe_s + 1) \\ &= (p^2e_t e_s - pe_s - pe_t + 1) \\ &= \varphi(T_t T_s) \end{aligned}$$

Donc φ respecte les relations de tresse. On a que φ est bien un homomorphisme. Comme $\varphi(p^{-1}T_s + p^{-1}) = e_s$, φ est carrément un homomorphisme surjectif.

Il faut voir que $I \subset \ker(\varphi)$. Soit s et t dans S tels que $m_{s,t} = 3$.

$$\begin{aligned} \varphi(x(s, t)) &= \varphi(T_s T_t T_s + T_s T_t + T_t T_s + T_t + T_s + 1) \\ &= \varphi(T_s T_t T_s) + \varphi(T_s T_t) + \varphi(T_t T_s) + \varphi(T_t) + \varphi(T_s) + 1 \\ &= (-p^2e_t e_s - p^2e_s e_t + pe_s + pe_t - 1) + (p^2e_s e_t - pe_t - pe_s + 1) + (p^2e_t e_s - pe_s - pe_t + 1) \\ &\quad + (pe_t - 1) + (pe_s - 1) + 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc on a $I \subset \ker(\varphi)$. Alors, on peut écrire $\bar{\varphi} : H_q(S, m)/I \longrightarrow T_d(S, m)$.

On pose

$$\begin{aligned} \psi : T_d(S, m) &\longrightarrow H_q(S, m)/I \\ e_s &\longmapsto p^{-1}(T_s + 1). \end{aligned}$$

Par construction ψ est l'inverse de φ . Il faut vérifier que c'est bien un homomorphisme surjectif. On commence en vérifiant la relation quadratique :

$$\begin{aligned} \psi(e_s^2) &= \psi(de_s) \\ &= d(p^{-1}(T_s + 1)) \\ &= (p + p^{-1})(p^{-1}(T_s + 1)) \\ &= (1 + p^{-2})T_s + (1 + p^{-2}) \\ &= p^{-2}((q + 1)T_s + q + 1) \\ &= p^{-2}((q - 1)T_s + q + 2T_s + 1) \\ &= p^{-2}(T_s^2 + 2T_s + 1) \\ &= p^{-2}(T_s + 1)^2 \\ &= (p^{-1}(T_s + 1))(p^{-1}(T_s + 1)) \\ &= \psi(e_s)^2 \end{aligned}$$

On vérifie les relations de tresse. Soient s et t dans S tels que $m_{s,t} = 3$.

$$\begin{aligned} \psi(e_s e_t e_s) &= (p^{-1}(T_s + 1))(p^{-1}(T_t + 1))(p^{-1}(T_s + 1)) \\ &= p^{-3}(T_s + 1)(T_t + 1)(T_s + 1) \\ &= p^{-3}(T_s T_t + T_t + T_s + 1)(T_s + 1) \\ &= p^{-3}(T_s T_t T_s + T_t T_s + T_s^2 + T_s + T_s T_t + T_t + T_s + 1) \\ &= p^{-3}(T_s^2 + T_s) + p^{-3}(T_s T_t T_s + T_t T_s + T_s T_t + T_s + T_t + 1) \\ &= p^{-3}((q - 1)T_s + q + T_s) + p^{-3}0 \\ &= p^{-3}q(T_s + 1) \\ &= p^{-1}(T_s + 1) \\ &= \psi(e_s) \end{aligned}$$

La relation de tresse pour $m_{s,t} = 2$ résulte, comme avant, du fait que si $e_s e_t = e_t e_s$, alors $T_s T_t = T_t T_s$. Pour tout T_s dans l'algèbre de Hecke, $\psi \circ \varphi(T_s) = \psi(pe_s - 1) = p(p^{-1}(T_s + 1)) - 1 = T_s$. Le lemme est démontré. \square

On a maintenant deux façons de voir l'algèbre de Temperley-Lieb : par sa présentation et comme un quotient de l'algèbre de Hecke. Il sera important de vérifier que cette algèbre n'est pas nul.

3.2. $T_d(S, m)$ est non nul. Dans l'article de tom Dieck, il vérifie par exemple que l'algèbre de Temperley-Lieb n'est pas nulle en démontrant deux $T_d(S, m)$ -modules non nuls [8]. S'il existe un module non nul, alors l'algèbre de départ ne peut pas être nulle. En effet, comme 0 agit trivialement sur tout module, si le module n'est pas nul, il existe $x \in T_d(S, m)$ tel que x n'agit pas trivialement et donc n'est pas égal à 0.

L'Exemple 15 utilise la représentation de réflexion de l'algèbre de Hecke, mais cet exemple impose deux autres conditions sur q : que $q + 1$ et $q^2 + q + 1$ soient inversibles. Le deuxième exemple, Exemple 18, est plus direct et n'ajoute pas de condition sur q . Soit k un corps, par exemple $\mathfrak{H}^* \cup \{0\}$.

Exemple 15. Soit V un k -module avec $\{v_s | s \in S\}$ comme base. On considère la forme symétrique sur V suivante :

$$\begin{aligned} (v_s, v_s) &= q + 1 \\ (v_s, v_t) &= p \quad m_{s,t} = 3 \\ (v_s, v_t) &= 0 \quad m_{s,t} = 2. \end{aligned}$$

Pour ceci, il faut supposer que $q + 1 \in k^*$ pour que la forme symétrique soit non dégénérée. On définit la représentation de réflexion d'une algèbre de Hecke ¹ :

$$\begin{aligned} \rho : H_q(S, m) &\longrightarrow \text{End}(V) \\ T_s &\longmapsto X_s : V \rightarrow V \\ &\quad v \longmapsto X_s(v) = qv - (v_s, v)v_s. \end{aligned}$$

Alors, $X_s(v_s) = qv_s - (v_s, v_s)v_s = -v_s$ et $X_s(v) = qv$ pour v dans v_s^\perp . Comme la forme symétrique est non dégénérée, V est la somme directe orthogonale de kv_s et $(kv_s)^\perp$. On a que $((q-1)X_s + q)v_s = v_s = X_s^2(v_s)$ et $((q-1)X_s + q)(v) = q^2v = X_s^2(v)$ pour $v \in (kv_s)^\perp$. Donc l'action de X_s respecte la relation quadratique.

On considère l'action de $H_q(S, m)$ sur le sous-module engendré par $\langle v_s, v_t \rangle$. La forme symétrique a comme matrice

$$\begin{pmatrix} q+1 & 0 \\ 0 & q+1 \end{pmatrix} \text{ si } m_{s,t} = 2$$

et

$$\begin{pmatrix} q+1 & p = \sqrt{q} \\ p = \sqrt{q} & q+1 \end{pmatrix} \text{ si } m_{s,t} = 3$$

Le déterminant $d_{s,t}$ de la forme symétrique sur ce sous-module est

$$d_{s,t} = \begin{cases} (q+1)^2 & m_{s,t} = 2 \\ q^2 + q + 1 & m_{s,t} = 3. \end{cases}$$

On suppose en plus que $q^2 + q + 1 \in k^*$. Donc, V est la somme directe orthogonale de $\langle v_s, v_t \rangle$ et $\langle v_s, v_t \rangle^\perp$. On a que $X_s|_{\langle v_s, v_t \rangle^\perp}$ et $X_t|_{\langle v_s, v_t \rangle^\perp}$ agissent par multiplication de q . Donc $X_s X_t X_s|_{\langle v_s, v_t \rangle^\perp}$ et $X_t X_s X_t|_{\langle v_s, v_t \rangle^\perp}$ agissent par q^3 .

On considère l'action de X_s et X_t sur $\langle v_s, v_t \rangle$ dans la base $\{v_s, v_t\}$. Dans le cas de $m_{s,t} = 3$, les matrices de cette action sont données par :

$$X_s = \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix}, X_t = \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix}.^2$$

Ceci donne la relation de tresse :

$$\begin{aligned} X_s X_t X_s &= \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -q + p^2 = 0 & p \\ -qp & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & pq \\ qp & qp^2 - q^2 = 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & pq \\ pq & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹On constate qu'il y avait une petite faute de frappe dans l'article de tom Dieck ; il a renversé les rôles de v et v_s .

²On a corrigé la faute de frappe de tom Dieck où il a oublié le signe négatif devant p .

En revanche,

$$\begin{aligned}
X_t X_s X_t &= \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -q & -qp \\ p & p^2 - q = 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -q^2 + qp^2 = 0 & pq \\ qp & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & pq \\ pq & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc, on a construit la représentation de réflexion de V de l'algèbre de Hecke. A partir de cette représentation, on va construire un nouveau module avec une action qui se factorise par φ . Ceci définira une action de l'algèbre de Temperley-Lieb sur ce nouveau module.

On définit la fonction $\omega : H_q(S, m) \rightarrow H_q(S, m)$ par $\omega(T_s) = -qT_s^{-1}$.

Lemme 16. La fonction ω est une involution qui est un automorphisme de l'algèbre de Hecke qui transforme le module V en un nouveau module $W = V^\omega$.

Démonstration. On voit que $\omega \circ \omega(T_s) = \omega(-qT_s^{-1}) = -q\omega(T_s^{-1}) = -q\omega(\frac{T_s+1-q}{q}) = (-q(\frac{-1}{q})\omega(-T_s - 1 + q)) = \omega(-T_s - 1 + q) = -(-qT_s^{-1}) - 1 + q = q\frac{T_s+1-q}{q} - 1 + q = T_s$. Donc, ω est son propre inverse.

Il reste à voir que ω est un homomorphisme, c'est à dire qu'il respecte les relations quadratiques et les relations de tresse. Soient s, t, r , et u dans S tels que $m_{s,t} = 3$ et $m_{r,u} = 2$. On vérifie les relations :

$$\begin{aligned}
\omega(T_s^2) &= \omega((q-1)T_s + q) \\
&= (q-1)(-qT_s^{-1} + q) \\
&= (q-1)(-q)\frac{T_s+1-q}{q} + q \\
&= (q-1)(-T_s + (q-1)) + q \\
&= (q-1)T_s + q - 2(q-1)T_s + (q-1)^2 \\
&= T_s^2 - 2(q-1)T_s + (q-1)^2 \\
&= (T_s - (q-1))^2 \\
&= (-q)^2 \frac{(T_s+1-q)^2}{q^2} \\
&= (-q)^2 (T_s^{-1})^2 \\
&= \omega(T_s)^2 \\
\omega(T_s T_t T_s) &= (-q)^3 T_s^{-1} T_t^{-1} T_s^{-1} \\
&= (-q)^3 (T_s T_t T_s)^{-1} \\
&= (-q)^3 (T_t T_s T_t)^{-1} \\
&= (-q)^3 T_t^{-1} T_s^{-1} T_t^{-1} \\
&= \omega(T_t T_s T_t) \\
\omega(T_r T_u) &= (-q)^2 T_r^{-1} T_u^{-1} \\
&= (-q)^2 (T_u T_r)^{-1} \\
&= (-q)^2 (T_r T_u)^{-1} \\
&= (-q)^2 T_u^{-1} T_r^{-1} \\
&= \omega(T_u T_r).
\end{aligned}$$

Donc ω respecte les relations de l'algèbre de Hecke, et il est bien une involution qui transforme V dans un nouveau module $W = V^\omega$ tel que pour $h \in H_q(S, m)$ et $w \in W = V^\omega$, h agit sur w comme $\omega(h)$ avec l'action du module de départ. \square

Cette construction du module, W , nous amène à la Proposition 17 qui correspond à la Proposition 1.5 de tom Dieck [8].

Proposition 17. *Le module W se factorise par l'homomorphisme φ de la Proposition 14.*

Démonstration. Il faut voir que l'idéal bilatère $I = \langle x(s, t) = T_s T_t T_s + T_s T_t + T_t T_s + T_s + T_t + 1 | m_{s,t} = 3 \rangle$ agit par zéro sur W . On note $Y_s = \omega(T_s) = -qT_s^{-1}$. On constate que les Y_s respectent la relation quadratique et celle de tresse car c'est l'image sous l'homomorphisme ω des T_s . Il faut démontrer que

$$Y_{s,t} = Y_s Y_t Y_s + Y_s Y_t + Y_t Y_s + Y_s + Y_t + 1 = \omega(x(s, t))$$

agit sur V par zéro.

On considère $Z_s = Y_s + 1$ et $Z_t = Y_t + 1$. On constate que $Z_s Z_t Z_s - qZ_s = Y_{s,t}$. En effet,

$$\begin{aligned} Z_s Z_t Z_s - qZ_s &= (Y_s + 1)(Y_t + 1)(Y_s + 1) - q(Y_s + 1) \\ &= (Y_s Y_t + Y_t + Y_s + 1)(Y_s + 1) - q(Y_s + 1) \\ &= Y_s Y_t Y_s + Y_t Y_s + Y_s^2 + Y_s + Y_s Y_t + Y_t + Y_s + 1 - q(Y_s + 1) \\ &= Y_s^2 + Y_s - q(Y_s + 1) + (Y_s Y_t Y_s + Y_t Y_s + Y_s Y_t + Y_t + Y_s + 1) \\ &= (q - 1)Y_s + q - (q - 1)Y_s - q + Y_{s,t} \\ &= Y_{s,t}. \end{aligned}$$

On a vu avant que V est la somme directe orthogonale de $\langle v_s, v_t \rangle$ et de $\langle v_s, v_t \rangle^\perp$. On va voir que $Y_{s,t}$ agit par zéro sur les deux espaces.

Comme T_s et T_t agissent par

$$X_s = \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix}, X_t = \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix}$$

respectivement sur, $\langle v_s, v_t \rangle$, on a que Z_s agit par

$$Z_s = Y_s + 1 = -q \begin{pmatrix} -1 & -p \\ 0 & q \end{pmatrix}^{-1} + 1 = -q \frac{1}{-q} \begin{pmatrix} q & p \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} q+1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3.$$

De même, on a que Z_t agit sur $\langle v_s, v_t \rangle$ par

$$Z_t = Y_t + 1 = -q \begin{pmatrix} q & 0 \\ -p & -1 \end{pmatrix}^{-1} + 1 = -q \frac{1}{-q} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ p & q \end{pmatrix} + 1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & q+1 \end{pmatrix}.$$

On a $Z_s Z_t Z_s = qZ_s$ sur $\langle v_s, v_t \rangle$. En effet,

$$\begin{aligned} Z_s Z_t Z_s &= \begin{pmatrix} q+1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & q+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q+1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^2 & p(q+1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q+1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} p^2(q+1) & p^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= q \begin{pmatrix} q+1 & p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= qZ_s. \end{aligned}$$

Donc $Y_{s,t} = Z_s Z_t Z_s - qZ_s = 0$ sur $\langle v_s, v_t \rangle$. Comme X_s agit par q sur $\langle v_s, v_t \rangle^\perp$, Y_s agit par $-q(\frac{1}{q}) = -1$. Donc $Z_s = Y_s + 1$ agit par zéro. Alors, $Y_{s,t} = Z_s Z_t Z_s - qZ_s$ agit par zéro sur $\langle v_s, v_t \rangle^\perp$ aussi. Comme l'action de I est nulle sur W , le module W se factorise par φ , et donc on peut faire un $T_d(S, m)$ -module de W . \square

³On constate qu'il fallait changer $-p$ en p pour corriger la suite de sa faute de calcul des matrices X_s et X_t .

On a bien construit un $T_d(S, m)$ -module qui est non nul. Pourtant, il fallait prendre deux conditions sur q en addition de celles déjà connues pour trouver $T_d(S, m)$ comme un quotient de l'algèbre de Hecke. Donc tom Dieck nous propose un autre $T_d(S, m)$ -module pour éviter ces conditions supplémentaires. On le regardera dans l'Exemple 18 suivant :

Exemple 18. Soit $A = (a_{st})$ une matrice symétrique $S \times S$ sur \mathfrak{H} . On considère l'algèbre associative $T(A)$ sur \mathfrak{H} suivante :

$$\begin{aligned} \text{Générateurs : } & Z_s \text{ pour } s \in S \\ \text{Relations : } & \begin{cases} Z_s^2 = a_{ss}Z_s \\ Z_s Z_t Z_s = a_{st} a_{ts} Z_s \end{cases} \end{aligned}$$

On définit un $T(A)$ -module dans la Proposition 19 qui correspond à la Proposition 1.6 de tom Dieck [8].

Proposition 19. Soit V le \mathfrak{H} -module avec $\{v_s | s \in S\}$ comme base. On a un $T(A)$ -module :

$$\begin{aligned} \rho : T(A) &\longrightarrow \text{End}(V) \\ Z_s &\longmapsto Z_s : V \rightarrow V \\ &v_t \mapsto Z_s(v_t) = a_{st}v_s \end{aligned}$$

On a en plus que chaque Z_s est de rang au plus un sur V .

Démonstration. Il est clair que Z_s est de rang au plus un car l'image est contenu dans l'espace engendré par v_s . Il faut vérifier seulement que ρ soit un homomorphisme. On se rappelle que \mathfrak{H} est commutatif et que la matrice A est symétrique. Soient s, t , et r dans S .

$$\begin{aligned} Z_s^2(v_t) &= Z_s(Z_s v_t) \\ &= Z_s(a_{st}v_s) \\ &= a_{st}a_{ss}v_s \\ &= (a_{ss}Z_s)(v_t) \\ (Z_s Z_t Z_s)(v_r) &= (Z_s Z_t)(a_{sr}v_s) \\ &= Z_s(a_{sr}a_{ts}v_t) \\ &= a_{sr}a_{ts}a_{st}v_s \\ &= (a_{st}a_{ts}Z_s)(v_r) \end{aligned}$$

Alors, (V, ρ) est bien un $T(A)$ -module. \square

Définition 20. On dit que $A = (a_{st})$ est indécomposable s'il n'existe pas de partition de $S = S_1 \cup S_2$ telle que $a_{st} = 0$ pour tout $s \in S_1, t \in S_2$.

Par la suite, on suppose que $\det(A) \neq 0$. On constate que A est indécomposable si et seulement si V est un $T(A)$ -module simple. En effet, si A est décomposable, alors $M = \langle v_s | s \in S_1 \rangle$ est un sous-module propre non nul de V car $Z_t(v_s) = a_{ts}v_t \in M$ si $t \in S_1$ et c'est égal à zéro (donc dans M) sinon. Ceci démontre par contraposée que si V est un $T(A)$ -module simple, alors A est décomposable.

Soit M un sous-module propre de V . Alors, il existe $v_s \in M$. En effet, soit $v \in M$ non nul. Comme $v \in V, v = \sum_{i \in S} a_i v_i \neq 0$. Comme $\det(A) \neq 0$, il existe $s \in S$ tel que $Z_s(v) \neq 0$, c'est donc dans l'espace engendré par v_s . Donc $v_s \in M$. On pose $S_1 = \{s | v_s \in M\}$ et $S_2 = S - S_1$ et donc $S = S_1 \cup S_2$ forme une partition de S . Comme $M \neq V$, il existe $v_t \in V - M$. Alors, M est stable par chaque Z_t pour $t \in S_2$. Donc, puisque $Z_t(v_s) = a_{ts}v_t$ pour tout $t \in S_2, s \in S_1$ est dans $M, a_{ts} = 0$. On a bien que A n'est pas indécomposable. Ceci nous amène à la Proposition 21 suivante :

Proposition 21. *D'après l'argumentation précédente si $\det(A) \neq 0$, A est une matrice indécomposable si et seulement si V est un $T(A)$ -module simple.*

La Proposition 21 correspond à la Proposition 1.7, mais celle-ci est un peu plus forte.

Dans le cas où (W, S) est un groupe de Coxeter de type ADE, on a $a_{ss} = d$, $a_{st} = 1$ pour $m_{s,t} = 3$, et $a_{s,t} = 0$ si $m_{s,t} = 2$. Alors V est un $T_d(S, m)$ -module par

$$\begin{aligned} \bar{\rho} : T_d(S, m) &\longrightarrow \text{End}(V) \\ e_s &\longmapsto Z_s : V \rightarrow V \\ &v_t \longmapsto Z_s(v_t) = a_{st}v_s \end{aligned}$$

En effet, si $s, t \in S$ et $u, v \in S$ tels que $m_{s,t} = 3$ et $m_{u,r} = 2$, on a pour $w \in S$

$$\begin{aligned} e_s^2 \cdot v_w &= Z_s^2(v_w) \\ &= a_{ss}a_{sw}v_s \\ &= da_{sw}v_s \\ &= de_s \cdot (v_w), \text{ et} \\ e_u e_r \cdot v_w &= e_u \cdot a_{rw}v_r \\ &= a_{rw}a_{ur}v_u \\ &= 0 \\ &= e_r e_u \cdot v_w, \text{ et} \\ e_s e_t e_s \cdot v_w &= (Z_s Z_t Z_s)(v_w) \\ &= a_{st}a_{ts}Z_s(v_w) \\ &= a_{sw}v_s \\ &= e_s \cdot v_w. \end{aligned}$$

Comme $\det(A)$ est un polynôme en d non trivial, en général $\det(A)$ est non nul. Ceci nous amène à la Proposition 22.

Proposition 22. *L'espace vectoriel $V = \langle v_s | s \in S \rangle$ est un $T_d(S, m)$ -module par*

$$\begin{aligned} \bar{\rho} : T_d(S, m) &\longrightarrow \text{End}(V) \\ e_s &\longmapsto Z_s : V \rightarrow V \\ &v_t \longmapsto Z_s(v_t) = a_{st}v_s \end{aligned}$$

Aussi si $\det(A) \neq 0$, alors on a un $T_d(S, m)$ -module simple.

Même si $\det(A)$ est non nul en général, on peut quand même trouver des contre exemples. Pour le groupe diédral D_3 , le groupe des rotations et symétries sur un triangle, si on désigne $d = 1$, on a

$$A = \begin{pmatrix} d & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

et $\det(A) = 0$. On n'a pas forcément que V est un $T(A)$ -module simple ; il est quand même un $T(A)$ -module et un $T_d(S, m)$ -module non nul.

4. LA STRUCTURE DE TD_n

On appelle TD_n l'algèbre de Temperley-Lieb de type D_n , autrement dit son groupe de Coxeter associé est de type D_n . Au lieu de noter les générateurs de TD_n par e_{s_i} , on les notera simplement e_i .

Dans la Partie 2 du papier de tom Dieck, il donne la structure de TD_n . Il utilise les algèbres de Temperley-Lieb de types A_{n-1} et B_n , notées TA_{n-1} et TB_n respectivement. D'abord tom Dieck trouve TD_n comme la somme directe de TA_{n-1} et un idéal de TD_n . Après, il introduit l'algèbre de Temperley-Lieb de type B_n pour trouver TD_n comme le noyau d'une suite exacte.

Nous verrons dans la Partie 4.1 la relation avec TA_{n-1} et dans la Partie 4.2 celle avec TB_n . On trouvera TD_n comme le noyau d'une suite exacte qui relie les homomorphismes des Parties 4.1 et 4.2 dans la Partie 4.3.

4.1. La relation avec TA_{n-1} . On a vu dans les Exemples 2 et 4 de la Partie 2 ce que c'est un groupe de Coxeter de type A_{n-1} . On notera les générateurs de TA_{n-1} de la même façon que celles de TD_n . Autrement dit, au lieu d'écrire $e_{s_1} \dots e_{s_{n-1}}$ pour les générateurs de TA_{n-1} , on va prendre $e_1 \dots e_{n-1}$. Avec cette notation on voit facilement comment une copie de TA_{n-1} apparaît dans TD_n .

Cette Proposition 23 correspondent à la Proposition 2.1 de tom Dieck.

Proposition 23. *On a un homomorphisme surjectif*

$$\begin{aligned} \alpha : TD_n &\rightarrow TA_{n-1} \\ e_0 &\mapsto e_1 \\ e_j &\mapsto e_j \text{ pour } j \geq 1. \end{aligned}$$

Démonstration. Chaque $e_j \in TA_{n-1}$ est l'image de $e_j \in TD_n$ par α , donc α est bien surjectif. Pour $i, j \geq 1$, tous les relations sont les mêmes dans TD_n et TA_{n-1} . On considère les relations qui incluent $e_0 \in TD_n$. Soient $j \in \llbracket 3, n-1 \rrbracket$. Alors $\alpha(e_0 e_j) = e_1 e_j = e_j e_1 = \alpha(e_j e_0)$. En plus, $\alpha(e_0 e_1) = e_1^2 = \alpha(e_1 e_0)$. Finalement, $\alpha(e_0 e_2 e_0) = e_1 e_2 e_1 = e_1 = \alpha(e_0)$ et de même $\alpha(e_2 e_0 e_2) = e_2 e_1 e_2 = e_2 = \alpha(e_2)$. Donc α est bien un homomorphisme. \square

Dans la Proposition 24 (Proposition 2.2 chez tom Dieck), on retrouve TD_n comme somme directe de TA_{n-1} et un idéal de TD_n .

Proposition 24. *Le noyau de α est l'idéal, I , engendré par $e_0 - e_1$. Le homomorphisme ⁴*

$$\begin{aligned} \alpha_1 : TA_{n-1} &\rightarrow TD_n \\ e_j &\mapsto e_j \end{aligned}$$

est l'inverse à droite de α . On a donc TD_n est isomorphe à $I \oplus TA_{n-1}$ comme TA_{n-1} -modules.

Démonstration. On a bien $\alpha \alpha_1 = id_{TA_{n-1}}$. Comme $\alpha(e_0 - e_1) = e_1 - e_1 = 0$, on a directement $I \subset \ker(\alpha)$. Donc α se factorise par TD_n/I .

$$\begin{array}{ccc} \alpha : TD_n & \longrightarrow & TA_{n-1} \\ \pi \searrow & & \nearrow \alpha' \\ & TD_n/I & \end{array}$$

Alors si α' est un isomorphisme, $I = \ker(\alpha)$. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} TD_n & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\alpha_1} \end{array} & TA_{n-1} \\ \pi \searrow & & \nearrow \alpha' \\ & TD_n/I & \end{array}$$

On a que $\alpha' \circ \pi \circ \alpha_1 = id_{TA_{n-1}}$. Donc α' est injectif. Il est surjectif car α l'est. Alors, α' est un isomorphisme et $I = \ker(\alpha)$. Pour terminer la démonstration, on applique le Lemme 3.7.4 de Lang [5] qui donne l'isomorphisme $TD_n \simeq I \oplus TA_{n-1}$ C'est en effet un isomorphisme comme TA_{n-1} -modules car TA_{n-1} et $I = \ker(\alpha)$ sont stable par multiplication par TA_{n-1} . \square

⁴Il est clair que tom Dieck voulait dire e_j et non pas e_1 est envoyé sur e_j . Autrement on n'aurait pas de définition de α_1 .

4.2. **La relation avec TB_n .** On utilisera l'algèbre de Temperley-Lieb de type B_n que tom Dieck étudia dans [7] et [6]. Comme avant, on notera les générateurs de TB_n par ϵ_i au lieu de ϵ_s . On a vu dans la Proposition 8 qu'il y a deux classes de conjugaison pour les générateurs du groupe de Coxeter de type B_n . Pour l'algèbre de Hecke, et donc pour l'algèbre de Temperley-Lieb, il faut donner deux paramètres. Dans l'article de tom Dieck, il prend une spécialisation de B_n où le paramètre associé à ϵ_0 est spécialisée à 1, ou bien $p = 1$. Donc cette spécialisation de TB_n est donnée par la présentation suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Générateurs : } \epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1} \\ \text{Relations : } \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_j^2 = d\epsilon_j \quad j \geq 1 \\ \epsilon_0^2 = 2\epsilon_0 \\ \epsilon_j\epsilon_i = \epsilon_i\epsilon_j \quad |i - j| \geq 2 \\ \epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1 = d\epsilon_1 \\ \epsilon_i\epsilon_j\epsilon_i = \epsilon_i \quad |i - j| = 1; i, j \geq 1. \end{array} \right. \end{array}$$

On note cette variante de TB_n par $T'D_n$. Dans la Proposition 25, on définit l'homomorphisme β de la Proposition 2.4 de tom Dieck qui va de TD_n dans $T'D_n$.

Proposition 25. *On définit*

$$\begin{array}{l} \beta : TD_n \longrightarrow T'D_n \\ e_0 \longmapsto \beta(e_0) = (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ e_j \longmapsto \beta(e_j) = \epsilon_j \quad \text{pour } j \geq 1. \end{array}$$

Alors, β est un homomorphisme et l'idéal bilatère, J , engendré par e_0e_1 est dans le noyau.

Démonstration. Pour $j \geq 1$, e_j et ϵ_j satisfont aux mêmes relations. Donc, on ne considère que celles qui restent. On utilisera les équations suivantes :

$$(4.1) \quad (\epsilon_0 - 1)^2 = 1$$

$$(4.2) \quad \epsilon_1(\epsilon_0 - 1)\epsilon_1 = 0.$$

Pour l'Equation 4.1, on a $(\epsilon_0 - 1)^2 = \epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 + 1 = 1$. Pour l'Equation 4.2, on a $\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)\epsilon_1 = \epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1 - \epsilon_1^2 = d\epsilon_1 - d\epsilon_1 = 0$. Alors, il reste à vérifier $\beta(e_0^2) = d\beta(e_0)$,

$\beta(e_0e_2e_0) = \beta(e_0)$, $\beta(e_2e_0e_2) = \beta(e_2)$, et $\beta(e_0e_1) = \beta(e_1e_0)$.⁵

$$\begin{aligned}\beta(e_0^2) &= ((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1))^2 \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)^2\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1^2(\epsilon_0 - 1) \\ &= d((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)) \\ &= d\beta(e_0)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\beta(e_0e_2e_0) &= ((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1))\epsilon_2((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)) \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)^2\epsilon_2\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1\epsilon_2\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ &= \beta(e_0)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\beta(e_2e_0e_2) &= \epsilon_2((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1))\epsilon_2 \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_2\epsilon_1\epsilon_2(\epsilon_0 - 1) \\ &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_2(\epsilon_0 - 1) \\ &= (\epsilon_0 - 1)^2\epsilon_2 \\ &= \epsilon_2 \\ &= \beta(e_2)\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\beta(e_0e_1) &= (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)\epsilon_1 \\ &= 0\end{aligned}\tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}&= \epsilon_1(\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\ &= \beta(e_1e_0)\end{aligned}\tag{4.2}$$

Donc β est bien un homomorphisme. La dernière relation que nous avons démontré indique que J est inclus dans le noyau de β . \square

On verra un peu plus loin que J est en fait égal au noyau de β . On cherchera aussi l'image de β pour mieux comprendre TD_n dans $T'D_n$ à travers la fonction β . Pour y arriver, il faut définir une nouvelle \mathfrak{H} -algèbre, \mathfrak{B} , égal au produit croisé de $\mathfrak{U} := TD_n/J$ et l'algèbre $\mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$ où τ est l'involution :

$$\begin{aligned}\tau : TD_n &\longrightarrow TD_n \\ e_j &\longmapsto e_j \text{ pour } j \geq 2 \\ e_0 &\longmapsto e_1 \\ e_1 &\longmapsto e_0.\end{aligned}$$

On voit directement que τ est une involution. Il définit une involution sur TD_n/J aussi car tout élément dans J et de la forme ae_0e_1b où a et b sont dans TD_n , et donc $\tau(ae_0e_1b) = ae_1e_0b = ae_0e_1b$.

Le produit croisé \mathfrak{B} est défini comme le \mathfrak{U} -module libre avec une base, $\{1, \tau\}$, et la multiplication :

$$(a + b\tau) \cdot (c + d\tau) := (ac + bd^\tau) + (bc^\tau + ad)\tau \text{ pour } a, b, c, \text{ et } d \in \mathfrak{U}$$

où x^τ signifie $\tau(x)$ pour $x \in \mathfrak{U}$. Cette définition de \mathfrak{B} nous amène à la Proposition 26 qui correspond à la Proposition 2.5 de tom Dieck.

⁵On rectifie la faute dans la démonstration de tom Dieck. Il voulait dire qu'il faut vérifier les relations $\beta(e_0e_2e_0) = \beta(e_0)$ et $\beta(e_2e_0e_2) = \beta(e_2)$ au lieu de la relation de tresse.

Proposition 26. *On définit*⁶

$$\begin{aligned} \beta_1 : T'D_n &\longrightarrow \mathfrak{B} \\ \epsilon_j &\longmapsto e_j \text{ pour } j \geq 1 \\ \epsilon_0 &\longmapsto 1 + \tau. \end{aligned}$$

Alors β_1 est un isomorphisme, l'image de β correspond à la sous-algèbre \mathfrak{u} , et $\ker(\beta) = J$.

Démonstration. Tous les ϵ_j et e_j respectent les mêmes relations pour $j \geq 1$. Donc il faut vérifier les relations concernant ϵ_0 . On vérifie $\beta_1(\epsilon_0)^2 = \beta_1(\epsilon_0^2)$, $\beta_1(\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1) = d\beta_1(\epsilon_1)$, et $\beta_1(\epsilon_0\epsilon_j) = \beta_1(\epsilon_j\epsilon_0)$ pour $j \geq 2$:

$$\begin{aligned} \beta_1(\epsilon_0)^2 &= (1 + \tau)^2 \\ &= 1 + 2\tau + 1 \\ &= 2(1 + \tau) \\ &= \beta_1(\epsilon_0^2) \\ \beta_1(\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1) &= e_1(1 + \tau)e_1 \\ &= (e_1 + e_1\tau)e_1 \\ &= e_1^2 + e_1e_0\tau \\ &= de_1 \pmod{(J)} \\ &= d\beta_1(\epsilon_1) \\ \beta_1(\epsilon_0\epsilon_j) &= (1 + \tau)e_j \\ &= e_j + e_j^{\tau}\tau \\ &= e_j + e_j\tau \\ &= \beta_1(\epsilon_j\epsilon_0). \end{aligned}$$

Donc β_1 est bien défini et comme $\beta_1(1) = 1$ et $\beta_1(\epsilon_0 - 1) = \tau$, il est surjectif. L'inverse de β est

$$\begin{aligned} \beta_1^{-1} : \mathfrak{B} &\longrightarrow T'D_n \\ a \cdot 1 + b \cdot \tau &\longmapsto \beta(a) + \beta(b)(\epsilon_0 - 1). \end{aligned}$$

Donc, β_1 est un isomorphisme. On a que $\beta_1^{-1}|_{\mathfrak{u}} = \beta$ et donc $\mathfrak{u} = T'D_n/J \simeq \text{im}(\beta)$, et donc $J = \ker(\beta)$. \square

On verra dans le Lemme 28 une description plus spécifique des générateurs de J que nous allons utiliser dans la démonstration du Théorème 27. Aussi, dans la Partie 6, on aura une description plus complète de $T''D_n \subset T'D_n$ en identifiant ses modules simples.

4.3. TD_n comme noyau d'une suite exacte. On notera dans la suite $T''D_n$ l'image de β qui est isomorphe à $\mathfrak{u} = TD/J$ d'après la Proposition 26. Les \mathfrak{h} -algèbres TA_{n-1} et $T''D_n$ ont des homomorphismes d'augmentation, t_a et t_d dans \mathfrak{h} qui envoient les générateurs e_j et ϵ_j à 0 et $h \cdot id_{TA_{n-1}}$ et $h \cdot id_{T''D_n}$ à h pour h dans \mathfrak{h} . On constate que le noyau d'une augmentation est l'ensemble des éléments engendré par les éléments de la base l'identité non compris. Ceci implique une fonction $Aug : TA_{n-1} \oplus T''D_n \rightarrow \mathfrak{h}$ qui envoie $x \oplus y$ sur $t_a(x) - t_d(y)$. Cette discussion nous amène au Théorème 27 qui correspond au Théorème 2.7 dans l'article de tom Dieck.

Théorème 27. *La suite suivante est exacte.*

$$0 \rightarrow TD_n \xrightarrow{(\alpha, \beta)} TA_{n-1} \oplus T''D_n \xrightarrow{Aug} \mathfrak{h} \rightarrow 0.$$

⁶On a corrigé la faute de frappe ; dans l'énoncé de la Proposition 2.5, il faut remplacer le deuxième ϵ_j par e_j .

Démonstration. Pour démontrer qu'une suite est exacte, il faut voir que l'image d'une fonction dans la suite est le noyau de la suivante. Ici, il faut que (α, β) soit injectif et que l'image de (α, β) soit le noyau de Aug .

On verra d'abord que (α, β) est injectif en démontrant que α envoie $J = \ker(\beta)$ sur le noyau de l'augmentation de TA_{n-1} par isomorphisme. Cela impliquera que (α, β) est injectif. En effet, si $x \in \ker(\alpha, \beta)$, alors $x \in J$ et $\alpha(x) = 0$. Comme α est injectif sur J , $x = 0$.

Pour démontrer que $\alpha : J \rightarrow \ker(t_a)$ est un isomorphisme, on verra une partie génératrice de J tel que chaque élément de cette partie est envoyé sur un élément différent de la base de TA_{n-1} . Ces éléments de TA_{n-1} forment une base de $\ker(t_a)$, et donc c'est une partie libre⁷. On peut en déduire que cette partie de J est indépendante et donc, que nous avons un isomorphisme.

On se rappelle de la base de TA_{n-1} donné par Goodman, de la Harpe, et Jones [4]. On note

$$e(i, j) = e_i, e_{i-1} \dots e_j \text{ pour } i \geq j.$$

On a comme base de TA_{n-1} les éléments réduits de la forme :

$$(4.3) \quad e(i_1, j_1) \dots e(i_p, j_p)$$

où

$$\begin{aligned} 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n-1, & \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n-1, \\ j_s \leq i_s, & \quad 0 \leq p \leq n-1. \end{aligned}$$

On utilise cette base pour démontrer le Lemme 28 sur la structure de J .

Lemme 28. *Le noyau de β , J , est engendré par les mots réduits de la forme ae_0e_1b où ni a ni b contiennent ni e_1 ni e_0 .*

Démonstration. Dans la Proposition 26 on a vu que $J = \ker(\beta)$ est engendré par les mots réduits, c'est à dire les mots tels que l'on ne peut plus réduire la longueur en remplaçant par les relations, de la forme ce_0e_1d . Si d contient un e_1 alors il existe une suite de la forme e_1xe_1 telle que x ne soit formé que des éléments e_j où $j \neq 1$ et x de longueur minimum. On peut trouver un tel x car d est de longueur finie.

On va voir qu'aucun élément de la forme e_1xe_1 n'est réduit. On écrit x dans la forme (4.3) : $e_1e(i_1, j_1) \dots e(i_p, j_p)e_1$. On peut le faire car tous e_j dans TD_n pour $j \geq 2$ respectent les mêmes relations que les e_j dans TA_{n-1} . Comme x est de longueur minimum, il faut que $e_{i_1} = e_{j_p} = e_2$ et comme $j_p = 2 \geq j_s$ pour $s < p$, $p = 1$. Donc $x = e_2$ et donc $e_1e_2e_1 = e_1$ et ce_0e_1d n'est pas réduit. De même, il n'y a pas de e_1 dans c . Comme $e_0e_1 = e_1e_0$ et comme e_0 a les mêmes relations que e_1 avec tout e_j avec $j \geq 2$, la démonstration revient au même pour $e_0 \notin c$ ou d . \square

Soient ⁸

$$\begin{aligned} \bar{e}(i, j) &= e_i e_{i-1} \dots e_1 e_0 e_2 \dots e_j, & j \geq 2 \\ \bar{e}(i, 1) &= e_i e_{i-1} \dots e_2 e_1 e_0 & \text{ce qui correspond au cas } j = 1. \end{aligned}$$

⁷Pourtant, cette identification n'est pas surjectif sur la base de TA_{n-1} comme tom Dieck indiqua dans son article mais sur $\ker(t_a)$.

⁸Il faut ajouter à la construction de tom Dieck les $\bar{e}(i, 1)$, autrement on ne peut pas avoir e_1e_0 , ce qui est clairement dans la base.

Ces éléments sont envoyées sur $de(i, j)$ par α . En effet,

$$\begin{aligned} \alpha(\bar{e}(i, j)) &= e_i e_{i-1} \dots e_1 e_1 e_2 \dots e_j \\ &= e_i e_{i-1} \dots e_2 (de_1) e_2 \dots e_j \\ &= de_i e_{i-1} \dots e_3 (e_2) e_3 \dots e_j \\ &\vdots \\ &= de(i, j) \\ \alpha(\bar{e}(i, 1)) &= e_i e_{i-1} \dots e_2 e_1^2 \\ &= de_i e_{i-1} \dots e_2 e_1 \\ &= de(i, 1). \end{aligned}$$

On a vu dans le Lemme 28 que $\ker(\beta) = J$ est engendré par les mots réduits de la forme ae_0e_1b où a et b ne contiennent ni e_1 ni e_0 . On verra en plus que tout mot réduite qui est dans J est de la forme (4.3) où $e(i_1, j_1)$ est remplacé par $\bar{e}(i_1, j_1)$ et $p \neq 0$ car l'identité n'est pas dans J .

On continue par récurrence sur

$$n' = \max\{k | e_k \text{ apparaît dans l'écriture réduite de } w \in J\}.$$

On peut le voir comme une récurrence sur n car si w est un élément dans TD_n tel que $n' = \max\{k | e_k \text{ apparaît dans l'écriture réduite de } w \in J\}$, alors, on peut voir w comme un élément de $TD_{n'}$. Comme tout mot réduite qui est dans J est de la forme ae_0e_1b d'après le Lemme 28, $n' \geq 1$. Pour $w \in J$, si $n' = 1$, on a que $w = e_0e_1 = \bar{e}(1, 1)$. Si $w \in J$ tel que $n' = 2$, alors, $w = e_2e_1e_0 = \bar{e}(2, 1)$ ou $w = e_2e_1e_0e_2 = \bar{e}(2, 2)$ ou $w = e_0e_1e_2 = \bar{e}(1, 1)e(2, 2)$.

On suppose que l'hypothèse est vrai pour $n' - 2$. Soit $w \in J$ un mot réduite qui contient deux fois $e_{n'-1}$, donc une suite $e_{n'-1}ye_{n'-1}$ où y est de longueur minimum et n'a aucun $e_{n'-1}$ dans son écriture réduite. Alors, par récurrence, $y = \bar{e}(n' - 2, n' - 2)$. En effet, si $y = \bar{e}(i, j)$ où $i, j \neq n' - 2$ ce serait en contradiction soit avec y de longueur minimum (si i ou $j < n' - 2$) soit avec w réduit (si i ou $j = n' - 1$, on pourrait remplacer $e_{n'-1}^2$ par $de_{n'-1}$). Aussi si $p > 1$, on ne pouvait pas avoir que y commence et termine par le même e_j . Ainsi y terminerait forcément par un e_j où $j < n - 2$. Ceci est une contradiction à la longueur minimum de y .

Alors $z = e_1\bar{e}(n' - 2, n' - 2)e_1 = \bar{e}(n' - 1, n' - 1)$ est contenu dans w . Donc $w = \bar{e}(n' - 1, n' - 1)$. En effet, sinon, on aurait une suite $e_j\bar{e}(n' - 1, n' - 1)$ (ou $\bar{e}(n' - 1, n' - 1)e_j$) où $j \neq 0, 1$ par le Lemme 28, et $j \leq n' - 2$. On pourrait passer e_j à droite jusqu'au on retrouve $e_{n'-1}e_{n'-2} \dots e_j e_{j+1} e_j \dots e_0 e_1 e_2 e_3 \dots e_{n'-1}$, ce qui n'est pas réduit. On aurait trouvé presque la même contradiction si on avait considéré $\bar{e}(n' - 1, n' - 1)e_j$. Donc z est le seul élément réduit qui ne contienne deux $e_{n'-1}$ dans son écriture.

Maintenant on considère les éléments qui contiennent qu'un seul $e_{n'-1}$ dans leur écriture réduite. Soit $w \in J$ de la forme réduite $xe_{n'-1}y$ où y est de longueur minimum. Donc $y = e(n' - 2, j)$ ou $\bar{e}(n' - 2, j)$. Il faut traiter deux cas : si $x = id$ et si $x \neq id$. Si $x = id$, alors $y = \bar{e}(n' - 2, j)$ car $w \in J$ et donc $w = e_{n'-1}y = e_{n'-1}\bar{e}(n' - 2, j) = \bar{e}(n' - 1, j)$.

Si $x \neq id$ et comme x n'a pas de $e_{n'-1}$ dans son écriture réduite, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et $x = \bar{e}(i_1, j_1)e(i_2, j_2) \dots e(i_{p-1}, j_{p-1})$. Donc,

$$w = xe_{n'-1}y = \bar{e}(i_1, j_1)e(i_2, j_2) \dots e(i_{p-1}, j_{p-1})e_{n'-1} \underbrace{e(n' - 2, j)}_{\text{ou bien } \bar{e}(n'-1, j)}.$$

Il faut que $j_{p-1} < n' - 2$ car sinon on pourrait réduire w par $e_{n'-2}e_{n'-1}e_{n'-2} = e_{n'-2}$. Donc si $y = \bar{e}(n' - 2, j)$, on pourrait passer $e_{j_{p-1}}$ dans $e_{n'-1}y = \bar{e}(n' - 1, j)$ jusqu'au on retrouve $\dots e_{j_{p-1}}e_{j_{p-1}+1}e_{j_{p-1}} \dots e_0e_1e_2e_3 \dots e_j$, ce qui n'est pas réduite. Donc $y = e(n' - 2, j)$ où $j > j_{p-1}$.

On se donne $i_p = n' - 1$ et $j_p = j$, et on a que w est de la forme prescrit. En effet, comme x n'a pas de $e_{n'-1}$, $i_p = n' - 1 > i_{p-1}$, $i_p = n' - 1 \geq j_p$, et $j_p = j > j_{p-1}$. Cette argumentation nous amène au Lemme 29.

Lemme 29. *Le noyau de β , J , a comme base les mots réduits de la forme (4.3) où $e(i_1, j_1)$ est remplacé par $\bar{e}(i_1, j_1)$.*

Démonstration. On a vu juste avant que J est engendré comme espace vectoriel par les éléments de la forme (4.3) où $e(i_1, j_1)$ est remplacé par $\bar{e}(e_1, j_1)$. Comme ils sont envoyés par α sur les éléments différents de la base de TA_{n-1} , on en déduit que ces éléments sont indépendants, et donc forment une base de J . \square

Il reste à voir que l'image de (α, β) est égal à $\ker(\text{Aug})$ Comme α et β sont des homomorphismes, $\alpha(h \cdot \text{id}_{TD_n}) = h \cdot \text{id}_{TA_{n-1}}$ et $\beta(h \cdot \text{id}_{TD_n}) = h \cdot \text{id}_{T''D_n}$. Ceci donne $\text{Aug} \circ (\alpha, \beta)(x) = t_a \circ (\alpha(x)) - t_d \circ (\beta(x)) = h - h = 0$. Donc $\text{im}(\alpha, \beta) \subset \ker(\text{Aug})$.

Soit $x + y \in \ker(\text{Aug})$, c'est à dire que $t_a(x) = t_d(y)$. Comme β est surjectif sur $T''D_n$, on a $u \in TD_n$ tel que $\beta(u) = y$. D'après le paragraphe précédent, $(\alpha, \beta)(u) \in \ker(\text{Aug})$. Alors $x + y - (\alpha, \beta)(u) = x - \alpha(u)$ qui est dans $\ker(\text{Aug})$, et ici ça veut dire dans $\ker(t_a)$. Alors comme α est un isomorphisme de J sur $\ker(t_a)$, il existe $j \in J$ tel que $x - \alpha(u) = \alpha(j)$. Donc, on a $(\alpha, \beta)(u + j) = (\alpha(u) + \alpha(j)) + (\beta(u) + \beta(j)) = x + y + 0 = x + y$ car $j \in J = \ker(\beta)$. Ceci montre que (α, β) est surjectif sur $\ker(\text{Aug})$. \square

5. L'ALGÈBRE DU GRAPHE D_n

Dans cette partie, on regardera l'algèbre de Hecke et le groupe de tresse associé au graphe de type D_n . Cette partie correspond à la fin de la deuxième partie de l'article de tom Dieck.

Définition 30. *Soit (W, S) un système de Coxeter et $m = (m_{s,t})$ sa matrice de Coxeter. On y associe un groupe de tresse, $Z(S, m)$ qui a comme présentation :*

$$\begin{aligned} \text{Générateurs : } & x_s \text{ pour } s \in S \\ \text{Relations : } & \underbrace{x_s x_t x_s \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}} = \underbrace{x_t x_s x_t \dots}_{m_{s,t} \text{ fois}} \end{aligned}$$

Pour le graphe D_n , nous définissons un nouveau groupe de tresse $Z'D_n$ avec une présentation :

$$\begin{aligned} \text{Générateurs : } & \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} \\ \text{Relations : } & \kappa_i \kappa_j \kappa_i = \kappa_j \kappa_i \kappa_j & |i - j| = 1; i, j \geq 1 \\ & \kappa_0 \kappa_1 \kappa_0 \kappa_1 = \kappa_1 \kappa_0 \kappa_1 \kappa_0 \\ & \kappa_i \kappa_j = \kappa_j \kappa_i & |i - j| \geq 2 \\ & \kappa_0^2 = 1 & . \end{aligned}$$

On constate que c'est un quotient du groupe de tresse de type B_n , ZB_n , où normalement la dernière relation n'est pas présente. On a $Z'D_n = ZB_n / (\kappa_0^2 - 1)$. On fait un lien entre $Z'D_n$ et ZD_n dans la Proposition 31 qui correspond à la Proposition 2.10 de tom Dieck.

Proposition 31. *Le groupe $Z'D_n$ est le produit semi-direct de ZD_n avec $\mathbb{Z}/2$ tel que le générateur de $\mathbb{Z}/2$, notée τ , agit sur ZD_n par l'involution décrite dans la Partie 4.2 et qui est utilisée dans la Proposition 26.*

Démonstration. On note le produit semi-direct de ZD_n avec $\mathbb{Z}/2$ par G . On définit deux homomorphismes inverses⁹ :

$$\begin{array}{lcl} f : & G & \longrightarrow Z'D, \\ & \tau, x_0, x_1, \dots, x_{n-1} & \longmapsto \kappa_0, \kappa_0\kappa_1\kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} \\ g : & Z'D_n & \longrightarrow G \\ & \kappa_0, \kappa_1, \dots, \kappa_{n-1} & \longmapsto \tau, x_1, \dots, x_{n-1}. \end{array}$$

Il faut vérifier que f et g sont des homomorphismes. Comme $x_1 \dots x_{n-1}$ satisfont aux mêmes relations que $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$, et comme τ est l'identité sur $x_2 \dots x_{n-1}$, il faut vérifier seulement les autres relations. On vérifie d'abord que f est un homomorphisme :

$$\begin{aligned} f(x_0x_1) &= (\kappa_0\kappa_1\kappa_0)\kappa_1 \\ &= \kappa_1\kappa_0\kappa_1\kappa_0 \\ &= f(x_1x_0) \\ f(x_0x_2x_0) &= (\kappa_0\kappa_1\kappa_0)\kappa_2(\kappa_0\kappa_1\kappa_0) \\ &= \kappa_0\kappa_1\kappa_0^2\kappa_2\kappa_1\kappa_0 \\ &= \kappa_0\kappa_1\kappa_2\kappa_1\kappa_0 \\ &= \kappa_0\kappa_2\kappa_1\kappa_2\kappa_0 \\ &= \kappa_2(\kappa_0\kappa_1\kappa_0)\kappa_2 \\ &= f(x_2x_0x_2) \\ f(\tau.x_0) &= \kappa_0(\kappa_0\kappa_1\kappa_0) \\ &= \kappa_1\kappa_0 \\ &= f(x_1\tau) \\ &= f(\tau(x_0)\tau) \\ f(\tau.x_1) &= \kappa_0\kappa_1 \\ &= \kappa_0\kappa_1\kappa_0\kappa_0 \\ &= f(x_0\tau) \\ &= f(\tau(x_1)\tau). \end{aligned}$$

Puis on continue en vérifiant que g est un homomorphisme :

$$\begin{aligned} g(\kappa_0\kappa_1\kappa_0\kappa_1) &= \tau x_1 \tau x_1 \\ &= x_0 \tau \tau x_1 \\ &= x_0 x_1 \\ &= x_1 x_0 \\ &= x_1 \tau^2 x_0 \\ &= x_1 \tau x_1 \tau \\ &= g(\kappa_1\kappa_0\kappa_1\kappa_0) \\ g(\kappa_0^2) &= \tau^2 \\ &= 1_G \\ &= g(1_{Z'D_n}) \\ g(\kappa_0\kappa_i) &= \tau x_i \quad \text{pour } i \geq 2 \\ &= x_i \tau \\ &= g(\kappa_i\kappa_0). \end{aligned}$$

Il est clair que $f \circ g$ est l'identité sur $Z'D_n$ sur les κ_i tels que $i \geq 1$ et que $g \circ f$ est l'identité de G sur les x_i pour $i \geq 1$. Alors on vérifie que f et g sont les inverses sur le reste des espaces.

⁹On constate que x_0 doit être envoyé sur $\kappa_0\kappa_1\kappa_0$ et non pas $\kappa_1\kappa_0\kappa_1$ comme tom Dieck dit dans l'article. Autrement, $g \circ f(x_0) \neq x_0$, et on ne peut pas démontrer $f(x_0x_1) = f(x_1x_0)$ et $f(x_0x_2x_0) = f(x_2x_0x_2)$.

$$\begin{aligned}
f \circ g(\kappa_0) &= f(\tau) = \kappa_0 \\
g \circ f(\tau) &= g(\kappa_0) = \tau \\
g \circ f(x_0) &= g(\kappa_0 \kappa_1 \kappa_0) = \tau \cdot x_1 \tau = x_0 \tau^2 = x_0
\end{aligned}$$

On a bien que $Z'D_n$ est isomorphe au produit semi-direct de ZD_n et $\mathbb{Z}/2$ par f . \square

Dans la Partie 2.4 on a défini l'algèbre de Hecke à partir d'un groupe de Coxeter. On peut aussi la définir à partir du groupe de tresse d'un groupe de Coxeter, ce que l'on fait ici. Nous définissons $H'D_n$, l'algèbre de Hecke associative et avec unité associée au groupe de tresse $Z'D_n$. Donc $H'D_n$ a générateurs $\kappa_0, \dots, \kappa_{n-1}$ et les relations de tresse définies au-dessus et avec les relations quadratiques :

$$\begin{aligned}
\kappa_0^2 &= 1 \\
\kappa_j^2 &= (q-1)\kappa_j + q \quad \text{pour } j \geq 1.
\end{aligned}$$

On constate que c'est l'algèbre de Hecke de type B_n telle que le paramètre associé à κ_0 est spécialisé à 1. On note HD_n l'algèbre de Hecke associée au groupe de tresse ZD_n . On a la Proposition 32 qui correspond à la Proposition 2.11 de tom Dieck.

Proposition 32. *L'algèbre $H'D_n$ est le produit croisé de HD_n et $\mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{G} = HD_n \times^* \mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$ le produit croisé de HD_n et $\mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$. Nous définissons deux homomorphismes inverses :

$$\begin{array}{lcl}
\phi : & H'D_n & \longrightarrow \mathfrak{G} \\
& \kappa_0 & \longmapsto \tau \\
& \kappa_j & \longmapsto x_j \text{ pour } j \geq 1 \\
\phi^{-1} : & \mathfrak{G} & \longrightarrow H'D_n \\
& \tau & \longmapsto \kappa_0 \\
& x_0 & \longmapsto \kappa_0 \kappa_1 \kappa_0 \\
& x_j & \longmapsto \kappa_j \text{ pour } j \geq 1.
\end{array}$$

On a vérifié que ces fonctions respectent les relations de tresse et qu'elles sont inverse l'une de l'autre. Il nous reste à vérifier les relations quadratiques. Comme les κ_j et les x_j respectent les mêmes relations quadratiques pour $j \geq 1$, il faut vérifier celles qui font intervenir κ_0 , x_0 , et τ :

$$\begin{aligned}
\phi(\kappa_0)^2 &= \tau^2 = 1 = \phi(1) = \phi(\kappa_0^2) \\
\phi^{-1}(\tau)^2 &= \kappa_0^2 = 1 = \phi^{-1}(1) = \phi^{-1}(\tau^2) \\
\phi^{-1}(x_0)^2 &= (\kappa_0 \kappa_1 \kappa_0)(\kappa_0 \kappa_1 \kappa_0) \\
&= \kappa_0 \kappa_1^2 \kappa_0 \\
&= \kappa_0((q-1)\kappa_1 + q)\kappa_0 \\
&= (q-1)(\kappa_0 \kappa_1 \kappa_0) + q(\kappa_0^2) \\
&= (q-1)\phi^{-1}(x_0) + q \\
&= \phi^{-1}((q-1)x_0 + q) \\
&= \phi^{-1}(x_0^2).
\end{aligned}$$

Donc ϕ est un isomorphisme et $H'D_n$ est le produit croisé de HD_n et $\mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$. \square

Il y a aussi une relation entre $T'D_n$ et $H'D_n$ démontrée par la Proposition 33 qui correspond à la Proposition 2.12 de tom Dieck.

Proposition 33. *L'algèbre $T'D_n$ est un quotient de $H'D_n$ sous l'homomorphisme*

$$\begin{aligned}\varphi' : H'D_n &\longrightarrow T'D_n \\ \kappa_0 &\longmapsto \epsilon_0 - 1 \\ \kappa_j &\longmapsto p\epsilon_j - 1 \text{ pour } j \geq 1.\end{aligned}$$

Et on a en plus que $\beta \circ \varphi = \varphi' \circ \beta'$ où φ est défini comme dans le Lemme 14 de la Partie 3.1, β comme dans la Proposition 25 dans la Partie 4.2, et β' ¹⁰ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\beta' : HD_n &\longrightarrow H'D_n \\ x_0 &\longmapsto \kappa_0\kappa_1\kappa_0 \\ x_j &\longmapsto \kappa_j \text{ pour } j \geq 1.\end{aligned}$$

Démonstration. Il faut vérifier seulement que φ' est un homomorphisme surjectif et puis nous avons directement $T'D_n$ est un quotient de $H'D_n$, spécifiquement $T'D_n = H'D_n / \ker(\varphi')$.

On vérifie les relations de tresse dans l'ordre qu'elles étaient données. On a

$$\begin{aligned}\varphi'(\kappa_i\kappa_j\kappa_i) &= (p\epsilon_i - 1)(p\epsilon_j - 1)(p\epsilon_i - 1) \text{ pour } |i - j| = 1; i, j \geq 1 \\ &= (p^2\epsilon_i\epsilon_j - p\epsilon_j - p\epsilon_i + 1)(p\epsilon_i - 1) \\ &= p^3\epsilon_i\epsilon_j\epsilon_i - p^2\epsilon_j\epsilon_i - p^2\epsilon_i^2 + p\epsilon_i - p^2\epsilon_i\epsilon_j + p\epsilon_j + p\epsilon_i - 1 \\ &= (p^3 - p^3 - p + 2p)\epsilon_i - p^2(\epsilon_j\epsilon_i + \epsilon_i\epsilon_j) + p\epsilon_j - 1 \\ &= p\epsilon_i - p^2(\epsilon_j\epsilon_i + \epsilon_i\epsilon_j) + p\epsilon_j - 1 \\ &= \varphi'(\kappa_j\kappa_i\kappa_j)\end{aligned}$$

car le calcul démontre que l'image est symétrique en i et j . Pour la deuxième relation, on calcule les images de $\kappa_0\kappa_1\kappa_0\kappa_1$ et de $\kappa_1\kappa_0\kappa_1\kappa_0$ séparément. C'est la façon la plus facile pour voir l'égalité. On a

$$\begin{aligned}\varphi'(\kappa_0\kappa_1\kappa_0\kappa_1) &= (\epsilon_0 - 1)(p\epsilon_1 - 1)(\epsilon_0 - 1)(p\epsilon_1 - 1) \\ &= (p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - \epsilon_0 + 1)(p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - \epsilon_0 + 1) \\ &= p^2\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1 - p^2\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_0^2\epsilon_1 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p^2\epsilon_0\epsilon_1^2 + p^2\epsilon_1^2 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 + \epsilon_0^2 - \epsilon_0 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - \epsilon_0 + 1 \\ &= p^2d\epsilon_0\epsilon_1 - p^2d\epsilon_1 - 2p\epsilon_0\epsilon_1 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p^2d\epsilon_0\epsilon_1 + p^2d\epsilon_1 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 + 2\epsilon_0 - \epsilon_0 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - \epsilon_0 + 1 \\ &= p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 - p\epsilon_1 + 1 \\ &= p(\epsilon_0\epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 - 2\epsilon_1) + 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi'(\kappa_1\kappa_0\kappa_1\kappa_0) &= (p\epsilon_1 - 1)(\epsilon_0 - 1)(p\epsilon_1 - 1)(\epsilon_0 - 1) \\ &= (p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p\epsilon_1 + 1)(p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p\epsilon_1 + 1) \\ &= p^2\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 - p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 - p^2\epsilon_1^2\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 - p\epsilon_1\epsilon_0^2 + \epsilon_0^2 + p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p^2\epsilon_1\epsilon_0\epsilon_1 + p\epsilon_0\epsilon_1 + p^2\epsilon_1^2 - p\epsilon_1 + p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p\epsilon_1 + 1 \\ &= p^2d\epsilon_1\epsilon_0 - p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 - p^2d\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 - 2p\epsilon_1\epsilon_0 + 2\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p^2d\epsilon_1 + p\epsilon_0\epsilon_1 + p^2d\epsilon_1 - p\epsilon_1 + p\epsilon_1\epsilon_0 - \epsilon_0 - p\epsilon_1 + 1 \\ &= -p\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_1\epsilon_0 + p\epsilon_0\epsilon_1 - p\epsilon_1 - p\epsilon_1 + 1 \\ &= p(-\epsilon_0\epsilon_1\epsilon_0 + \epsilon_1\epsilon_0 + \epsilon_0\epsilon_1 - 2\epsilon_1) + 1.\end{aligned}$$

Donc on a bien $\varphi'(\kappa_0\kappa_1\kappa_0\kappa_1) = \varphi'(\kappa_1\kappa_0\kappa_1\kappa_0)$. Pour i et j tels que $|i - j| \geq 2$, on a $\varphi'(\kappa_i\kappa_j) = (p\epsilon_i - 1)(p\epsilon_j - 1) = (p\epsilon_j - 1)(p\epsilon_i - 1) = \varphi'(\kappa_j\kappa_i)$ car $\epsilon_i\epsilon_j = \epsilon_j\epsilon_i$ quand $|i - j| \geq 2$. Finalement, $\varphi'(\kappa_0)^2 = (\epsilon_0 - 1)^2 = \epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 + 1 = 1 = \varphi'(1) = \varphi'(\kappa_0^2)$.

Il faut vérifier la relation quadratique pour κ_j pour $j \geq 1$:

$$\begin{aligned}\varphi'(\kappa_j^2) &= \varphi'((q - 1)\kappa_j + q) \\ &= (q - 1)\varphi'(\kappa_j) + q\end{aligned}$$

¹⁰Au lieu de α , il faut lire β . C'est pour ça que nous avons changé la notation. Ici β' correspond à $\tilde{\alpha}$ chez tom Dieck.

$$\begin{aligned}
&= (p^2 - 1)(p\epsilon_j - 1) + p^2 \\
&= p^3\epsilon_j - p\epsilon_j - p^2 + 1 + p^2 \\
&= p^3\epsilon_j - p\epsilon_j + 1 \\
&= p^3\epsilon_j + p\epsilon_j - 2p\epsilon_j + 1 \\
&= p^2(p + p^{-1})\epsilon_j - 2p\epsilon_j + 1 \\
&= p^2d\epsilon_j - 2p\epsilon_j + 1 \\
&= p^2\epsilon_j^2 - 2p\epsilon_j + 1 \\
&= (p\epsilon_j - 1)^2 \\
&= \varphi'(\kappa_j)^2.
\end{aligned}$$

Donc φ' est un homomorphisme de $H'D_n$ à $T'D_n$. Il est surjectif car $\varphi'(\kappa_0 + 1) = \epsilon_0$ et $\varphi'(p^{-1}(\kappa_j + 1)) = p^{-1}(p\epsilon_j - 1 + 1) = \epsilon_j$. Donc on a l'algèbre $T'D_n$ est bien un quotient de l'algèbre $H'D_n$.

On considère $\beta \circ \varphi$ et $\varphi' \circ \beta'$. On a

$$\begin{array}{rcccl}
\beta \circ \varphi : & HD_n & \xrightarrow{\varphi} & TD_n & \xrightarrow{\beta} & T'D_n \\
& x_j & \mapsto & pe_j - 1, & e_0 & \mapsto & (\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1) \\
& & & & e_j & \mapsto & \epsilon_j \text{ pour } j \geq 1, \text{ et} \\
\varphi' \circ \beta' : & HD_n & \xrightarrow{\beta'} & H'D_n & \xrightarrow{\varphi'} & T'D_n \\
& x_0 & \mapsto & \kappa_0\kappa_1\kappa_0, & \kappa_0 & \mapsto & (\epsilon_0 - 1) \\
& x_j & \mapsto & \kappa_j, & \kappa_j & \mapsto & p\epsilon_j - 1 \text{ pour } j \geq 1.
\end{array}$$

Alors on a $\beta \circ \varphi(x_0) = \beta(pe_0 - 1) = p((\epsilon_0 - 1)\epsilon_1(\epsilon_0 - 1)) - 1 = p\varphi'(\kappa_0)\epsilon_1\varphi'(\kappa_1) - \varphi'(\kappa_0^2) = \varphi'(\kappa_0)(p\epsilon_1 - 1)\varphi'(\kappa_0) = \varphi'(\kappa_0)\varphi'(\kappa_1)\varphi'(\kappa_0) = \varphi'(\kappa_0\kappa_1\kappa_0) = \varphi' \circ \beta'(x_0)$. On a aussi pour $j \geq 1$ $\beta \circ \varphi(x_j) = p\epsilon_j - 1 = \varphi'(\kappa_j) = \varphi' \circ \beta'(x_j)$. \square

6. L'ALGÈBRE $T'D_n$

Dans cette partie, nous étudierons la structure de $T'D_n$ et de $T''D_n$, l'image de β , pour pas une racine de l'unité. Aussi on suppose que \mathfrak{H} est de caractéristique zéro et algébriquement clos. On a vu avant que $T'D_n$ est une spécialisation de type B_n , donc il faut donner quelques précisions pour adapter les résultats de [7].

En utilisant l'isomorphisme de la Partie 4.2, dans la Partie 6.1 on regardera un résultat général des modules de restriction et d'induction pour $T'D_n$ et un sous-algèbre. Puis dans la Partie 6.2, on trouvera une caractérisation des modules simples de $T''D_n$.

6.1. La proposition 3.2 de tom Dieck. Pour pouvoir identifier les modules simples de $T''D_n$, il nous faudra un résultat général sur les modules simples de $T'D_n \simeq \mathfrak{B}$ par la Proposition 26. Par la suite, il faut prendre \mathfrak{H} un corps de caractéristique zéro et algébriquement clos. On reprend la notation de la Partie 4.2. On a \mathfrak{U} est une algèbre semi-simple avec un automorphisme d'involution τ sur \mathfrak{H} , et soit \mathfrak{B} le produit croisé décrit dans la Partie 4.2.

Si U est un \mathfrak{U} -module, on note U^τ le \mathfrak{U} -module tordu par τ . Autrement dit, si l'action de \mathfrak{U} sur U est définie par $u \cdot x$, alors l'action de \mathfrak{U} sur U^τ est définie par $u \cdot x = \tau(u) \cdot x$. On notera par la suite $\tau(u) = u^\tau$. Comme τ est un automorphisme, U est irréductible si et seulement si U^τ est irréductible.

On définit l'automorphisme d'involution σ de \mathfrak{B} par $\sigma(a + b\tau) = a - b\tau$. Si V est un \mathfrak{B} -module, alors \bar{V} est le \mathfrak{B} -module tordu par σ . Encore, c'est à dire que $u \cdot v$ étant l'action de \mathfrak{B} sur V , alors $u \cdot v = \sigma(u) \cdot v$ est l'action sur \bar{V} . Alors \bar{V} s'appelle le *module conjugué*. Comme σ est un automorphisme, V est irréductible si et seulement si \bar{V} est irréductible.

Soit U est isomorphe à U^τ , soit non-isomorphe et de même pour V et \bar{V} . On dit que U est de *type I* (resp. de *type II*) si $U \simeq U^\tau$ (resp. $U \not\simeq U^\tau$). On dit que V est de *type I* (resp.

de type II) si $V \neq \bar{V}$ (resp. $V \simeq \bar{V}$). La Proposition 34, qui correspond à la Proposition 3.2 de tom Dieck expliquera la raison de ces notations. Dans son article, tom Dieck nous renvoie sur la démonstration du Théorème 7.3 dans le Chapitre VI de son livre [2] pour les variations des démonstrations de ces résultats. Ici, on ne fait pas pareil ; on fera les démonstrations plutôt algébriques [8].

- Proposition 34.** (1) Si V est un \mathfrak{B} -module simple de type I, alors $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V = U$ est un module simple de type I et $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq V \oplus \bar{V}$.
- (2) Si V est un \mathfrak{B} -module simple de type II, alors $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V = U \oplus U^\tau$ et $V \simeq \text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq \text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U^\tau$. On a en plus que U et U^τ sont de type II.
- (3) Si U est un \mathfrak{U} -module simple de type I, alors $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq V \oplus \bar{V}$. En plus, $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V \simeq \bar{V} \simeq U$.
- (4) Si U est un \mathfrak{U} -module simple de type II, alors $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq V$ est un \mathfrak{B} -module simple de type II. En plus, $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V \simeq U \oplus U^\tau$.

Avant de démontrer la Proposition 34, il nous faut le lemme suivant.

Lemme 35. Pour U un \mathfrak{U} -module et V un \mathfrak{B} -module, on a :

–

$$\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq U \oplus U^\tau$$

–

$$\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V \simeq V \oplus \bar{V}.$$

Démonstration. On se souvient que $\mathfrak{B} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}\tau$. Par définition, on a que $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(U) = \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{U}} U$. Ceci donne $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(U) = \mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}} U \oplus \mathfrak{U}\tau \otimes_{\mathfrak{U}} U$.

$$\begin{aligned} \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U &= \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}} U \oplus \mathfrak{U}\tau \otimes_{\mathfrak{U}} U) \\ &= \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}} U) \oplus \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{U}\tau \otimes_{\mathfrak{U}} U) \\ &= U \oplus U^\tau. \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte de l'action de U sur $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}} U)$ et $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}}(\mathfrak{U}\tau \otimes_{\mathfrak{U}} U)$. En effet, pour $u \in \mathfrak{U}$ et $x \in U$, $u.(1 \otimes x) = u \otimes x = 1 \otimes u.x$ et $u.(\tau \otimes x) = u\tau \otimes x = \tau u^\tau \otimes x = \tau \otimes u^\tau x$. Donc ceci donne

$$\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq U \oplus U^\tau.$$

Il nous reste à voir

$$\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V \simeq V \oplus \bar{V}.$$

On récrit \mathfrak{B} comme $\mathfrak{B} = \langle 1 \otimes 1 + \tau \otimes \tau \rangle \oplus \langle 1 \otimes 1 - \tau \otimes \tau \rangle$. On note $\text{res}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V = V'$. Alors, $\text{ind}_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} V' = \mathfrak{B} \otimes_{\mathfrak{U}} V' = \langle 1 \otimes 1 + \tau \otimes \tau \rangle V' \oplus \langle 1 \otimes 1 - \tau \otimes \tau \rangle V' \simeq V \oplus \bar{V}$ car la première composante est isomorphe à V et la deuxième est isomorphe à \bar{V} .

En effet, \mathfrak{U} agit sur $\langle 1 \otimes 1 + \tau \otimes \tau \rangle \oplus \langle 1 \otimes 1 - \tau \otimes \tau \rangle$ comme \mathfrak{U} . Pour $u \in \mathfrak{U}$ et $v \in V'$, $u.1 \otimes v = u \otimes v = 1 \otimes u.v$ et $u.\tau \otimes v = u\tau \otimes v = \tau u^\tau \otimes v = \tau \otimes u^\tau v = \tau \otimes \tau u.v$. On a aussi que τ agit sur la première composante par τ et sur la deuxième composante par $-\tau$. En effet, $\tau.(1 \otimes v + \tau \otimes v) = \tau \otimes v + \tau^2 \otimes v = \tau \otimes v + 1 \otimes \tau v = \tau \otimes \tau^2 v + 1 \otimes (\tau.v) = 1 \otimes (\tau.v) + \tau \otimes \tau(\tau.v)$

et $\tau.(1 \otimes v - \tau \otimes \tau v) = \tau \otimes v - \tau^2 \otimes \tau v = \tau \otimes \tau^2 v - 1 \otimes \tau v = 1 \otimes (-\tau.v) - \tau \otimes \tau(-\tau.v)$. Donc on a bien que

$$\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = V \oplus \bar{V}.$$

□

Démonstration. On commence la démonstration de la Proposition 34. On va utiliser deux résultats de la théorie de représentations. La réciprocité de Frobenius dit que si U est un \mathbb{U} -module et V est un \mathfrak{B} -module, alors

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U, V).$$

Deuxièmement, dans le cas où \mathfrak{H} est algébriquement clos, V est un \mathfrak{B} -module simple si et seulement si $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, V)$ est de dimension 1.

- (1) On suppose que V est un \mathfrak{B} -module de type I. On note $U = \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V$. D'après le Lemme 35, $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = V \oplus \bar{V}$. On utilise la réciprocité de Frobenius :

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V, V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V \oplus \bar{V}, V).$$

Comme V est de type I, tout $\beta \circ \alpha : V \xrightarrow{\alpha} V \oplus \bar{V} \xrightarrow{\beta} V$, où β est la projection de la deuxième composante, est égal à zéro par le Lemme de Shur. Donc pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, V \oplus \bar{V}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V \oplus \bar{V}, V)$, l'image de α est inclus dans V . Donc $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, V \oplus \bar{V}) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, V)$, ce qui est de dimension 1 comme V est simple. Donc $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V)$ est de dimension 1, et donc $U = \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V$ est simple.

Par le Lemme 35 $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = U \oplus U^{\tau}$. On considère $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U)) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U, \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U)$, ce qui n'est pas de dimension 1 car $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = V \oplus \bar{V}$ n'est pas simple. Pour tout $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U))$, si $\beta \circ \alpha : U \xrightarrow{\alpha} U \oplus U^{\tau} \xrightarrow{\beta} U^{\tau}$ est égal à zéro, par le même raisonnement que dans le paragraphe précédent, $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U)) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, U)$ et donc serait de dimension 1. Si $\beta \circ \alpha \neq 0$, par le lemme de Shur, c'est un isomorphisme et donc $U \simeq U^{\tau}$ est de type I.

- (2) Soit V un \mathfrak{B} -module simple de type II. On note $U' = \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V$. Par la réciprocité de Frobenius et le Lemme 35,

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U', \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U', V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V \oplus \bar{V}, V)$$

ce qui est de dimension 2 car $V \simeq \bar{V}$. Donc $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U', U')$ est de dimension 2 et U' est de la forme $U \oplus U_1$ où U et U_1 sont simple est $U \neq U_1$.

Ou bien $U \simeq U^{\tau}$, ou bien $U_1 \simeq U^{\tau}$. En effet, $U' \simeq U^{\tau}$ parce que $V \simeq V^{\tau}$ et $U = \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V \simeq \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V^{\tau}$.

Par le Lemme 35, $V \oplus \bar{V} = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U' = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U \oplus \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U_1$. Donc $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U$ et $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U_1$ sont simples et isomorphes à V . On considère $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = U \oplus U^{\tau} \simeq \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = U \oplus U_1$. Alors $U_1 \simeq U^{\tau} \neq U$.

- (3) Soit U un \mathbb{U} -module simple de type I. On note $V' = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U$. Par la réciprocité de Frobenius,

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V') \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U, V').$$

D'après le Lemme 35, $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, U \oplus U^\tau)$, ce qui est de dimension 2 car U est de type I. Donc $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U$ n'est pas simple. Alors car $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V', V')$ est de dimension 2, on a que V est de la forme $V \oplus V_1$ où V et V_1 sont simples et $V \neq V_1$.

Aussi par Frobenius, $\text{Hom}_{\mathfrak{B}}(V, \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U) = \text{Hom}_{\mathbb{U}}(\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V, U)$. Ceci est de dimension 1. Si V est de type II, alors par (2), $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = U \oplus U^\tau$ où U est de type II, ce qui serait une contradiction. Donc V est de type I et $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V$ est simple, et alors égal à U . On retrouve de la même façon que $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V_1 = U$.

Il reste à démontrer que $V_1 = \bar{V}$. Comme $U = \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V$, on a $\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = V \oplus V_1 = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = V \oplus \bar{V}$. Donc car V est de type I, on trouve $V_1 = \bar{V}$.

(4) Soit U un \mathbb{U} -module simple de type II. On note $V = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U$. Alors

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U, V).$$

Comme $U \neq U^\tau$, $\text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) = \text{Hom}_{\mathbb{U}}(U, U)$ est de dimension 1 car U est simple. Donc $V = \text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U$ est simple. D'après le Lemme 35, $\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V = U \oplus U^\tau$.

Il reste à voir que V est de type II. Par la réciprocity de Frobenius,

$$\text{Hom}_{\mathbb{U}}(\text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V, \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V) \simeq \text{Hom}_{\mathfrak{B}}(\text{ind}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} \text{res}_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} V, V).$$

Ceci n'est pas de dimension 1 car $U \oplus U^\tau$ n'est pas simple. Donc, l'ensemble de homomorphismes de V dans $V \oplus \bar{V}$ est de dimension plus que 1. Alors, il doit exister un homomorphisme, α , tel que $\text{im}_\alpha \cap \bar{V}$ est nonvide. Par le Lemme de Shur, α est un isomorphisme entre V et \bar{V} . Donc V est de type II. □

6.2. Les modules simples de $T''D_n$. Dans cette partie, nous utiliserons les résultats de la Partie 6.1 et [7] pour trouver les modules simples de $T'D_n$ et $T''D_n$ (quand p n'est pas une racine de l'unité). On se rappelle de la définition de $T'D_n$ donnée dans la Partie 4.2. L'algèbre $T'D_n$ est une spécialisation de l'algèbre de Temperley Lieb de type B_n que tom Dieck étudia dans son article [7]. On trouva une fonction β de TD_n dans $T'D_n$ dont l'image est $T''D_n$. Comme $T'D_n$ est une variante de TB_n , il faut modifier les résultats de [7] pour qu'ils conviennent à cette situation.

Pour appliquer le résultat de [7], tom Dieck nous propose les idempotents de $T'D_n$, f_k et g_k avec quelques propriétés. On constate que les éléments f_k et g_k donnés dans l'article [8] ne sont pas les idempotents. Ici, on corrige les formules pour se mettre en accord avec l'article [7]. Entre les articles [8] et [7], p correspond à $-A^2$. On note $p' = \sqrt{-p} = A$, ce qui existe car \mathfrak{H} est algébriquement clos. On note

$$P_k = \frac{p'^k - p'^{-k}}{p' - p'^{-1}}.$$

Alors, selon l'article [7],¹¹

$$f_k = f_{k-1} + \frac{P_{2k-1}}{P_{2k+1}} f_{k-1} \epsilon_k f_{k-1}$$

¹¹On corrige les fautes dans l'écriture de f_k et g_k dans [8] en utilisant leur formules données dans [7].

et

$$g_k = g_{k-1} + \frac{P_{2k-3}}{P_{2k-1}} g_{k-1} \epsilon_k g_{k-1}.$$

Tammo tom Dieck utilisa les idempotents dans [7] pour démontrer la structure du *diagramme de Bratteli* pour TB_n , le diagramme qui décrit les restrictions et inductions des modules simples de TB_n à TB_{n-1} et TB_{n+1} respectivement en termes des modules simples de TB_{n-1} et TB_{n+1} . Dans l'article [8], tom Dieck démontre que le diagramme de Bratteli est le même pour $T'D_{n-1} \subset T'D_n$. Plus spécifiquement, $T'D_n$ a $n + 1$ modules simples distincts : $M_0(n), M_1(n), \dots, M_n(n)$ de dimension $\binom{n}{j}$.

On se rappelle de la notation des Parties 4.2 et 6.1. On a $\mathfrak{B} \simeq T'D_n$ est isomorphe au produit croisé de $\mathfrak{U} = TD_n/J$ et $\mathfrak{H}[\tau]/(\tau^2 - 1)$. On utilisera le diagramme de Bratteli et la Proposition 34 pour identifier les modules simples de $T'D_n$ dans le Théorème 36 qui correspond au Théorème 3.1 de tom Dieck.

Théorème 36. *Les modules simples de $T'D_n$ sont :*

- (1) *pour $n = 2k + 1$, les restrictions $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j$ pour $j \leq k$. On a en plus $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j \simeq res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_{n-j}$.*
- (2) *pour $n = 2k$, les restrictions $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j$, pour $j < k$. Dans ce cas $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j \simeq res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_{n-j}$. Le module $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_k$ est la somme directe de deux $T'D_n$ -modules simples de la même dimension.*

Démonstration. D'après la Proposition 34, il suffit de connaître les modules $\overline{M_j(n)}$. (S'il est simple de type I, $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n)$ est un $T'D_n$ -module simple ; s'il est de type II, $res_{\mathfrak{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n)$ est la somme de deux $T'D_n$ -modules simples de même dimension.)

On note res_{n-1} la restriction de $T'D_n$ à $T'D_{n-1}$. Le diagramme de Bratteli nous dit ¹²

$$\begin{aligned} res_{n-1} M_j(n) &= M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n-1), \quad 1 \leq j \leq n-1 \\ res_{n-1} M_0(n) &= M_0(n-1), \\ res_{n-1} M_n(n) &= M_{n-1}(n-1) \end{aligned}$$

Pour tout $T'D_n$ -module simple M , son type d'isomorphisme est déterminé par $res_{n-1} M$. En effet, tout $T'D_n$ -module simple est isomorphe à un $M_j(n)$. Si $M_j(n) \simeq M_{j'}(n)$, alors $res_{n-1} M_j(n) \simeq res_{n-1} M_{j'}(n)$. Aussi si $res_{n-1} M_j(n) \simeq res_{n-1} M_{j'}(n)$, alors, $M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n-1) \simeq M_{j'-1}(n-1) \oplus M_{j'}(n-1)$. Comme tous les $M_j(n-1)$ sont distincts, $j = j'$ et donc $M_j(n) = M_{j'}(n)$.

On démontre par récurrence que $\overline{M_j(n)} \simeq M_{n-j}(n)$. Comme les $M_j(n)$ sont distincts, ça veut dire que $M_j(n)$ est de type I sauf dans le cas où $j = n - j$. C'est à dire quand $n = 2k$, $M_k(n)$ est de type I.

La récurrence commence avec $n = 1$, autrement dit quand l'algèbre $T'D_n$ est engendrée par τ . Dans ce cas, elle est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$.

On veut démontrer que $\overline{M_0(1)} \simeq M_1(1)$. Le module $M_0(1)$ est le module trivial où τ agit par 1, et $M_1(1)$ est le module de dimension 1 où τ agit par -1 . Donc, comme $\overline{M_0(1)}$ est aussi un module simple de dimension 1 où τ agit par $-\tau$ et donc par -1 , $\overline{M_0(1)} \simeq M_1(1)$.

On suppose que $\overline{M_j(n-1)} \simeq M_{n-1-j}(n-1)$. On constate que la conjugaison est compatible avec la restriction. C'est à dire $res_{n-1} \overline{M_j(n)} = \overline{res_{n-1} M_j(n)}$. Alors, on a $res_{n-1} \overline{M_j(n)} = \overline{res_{n-1} M_j(n)} = \overline{M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n-1)} = \overline{M_{j-1}(n-1)} \oplus \overline{M_j(n-1)} = M_{n-1-(j-1)}(n-1) \oplus M_j(n-1)$

¹²Il est clair que tom Dieck voulait dire que $res_{n-1} M_j(n)$ est égal à $M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n-1)$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et non pas égal à $M_{j-1}(n-1) \oplus M_j(n)$.

$M_{n-1-j}(n-1) = M_{n-j} \oplus M_{(n-j)-1}$ par récurrence. D'après le diagramme de Bratteli, on a $res_{n-1} \overline{M_j(n)} = res_{n-1} M_{n-j}(n)$. Donc comme le type d'isomorphisme est déterminé par la restriction à $T''D_{n-1}$, $\overline{M_j(n)} = M_{n-j}(n)$.

Alors, si $n = 2k + 1$, $\overline{M_j(n)} \simeq M_{n-j}(n) \neq M_j(n)$ car tous $M_j(n)$ sont distinctes. Donc $M_j(n)$ est de type I. D'après la Proposition 34, $res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n) \simeq res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_{n-j}(n)$ est un $T''D_n$ -module simple.

Si $n = 2k$, $\overline{M_j(n)} \simeq M_{n-j}(n)$, ce qui n'est pas isomorphe à $M_j(n)$ pour $j \neq k$ car tous $M_j(n)$ sont distincts. Donc $M_j(n)$ est de type I. D'après la Proposition 34, $res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n) \simeq res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_{n-j}(n)$ est un $T''D_n$ -module simple. Pour $j = k$, $\overline{M_j(n)} \simeq M_{n-j}(n) = M_j(n)$ est de type II. Donc il est la somme directe d'un $T''D_n$ -module simple U et U^τ qui est aussi simple, non-isomorphe à U , et de la même dimension que U .

Alors, il faut voir qu'il n'y a pas d'autre $T''D_n$ -module simple. Soit U un $T''D_n$ -module simple. S'il est de type I, alors $ind_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U \simeq M_j(n) \oplus M_{n-j}(n)$ et $res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n) = U$ où $M_j(n)$ est de type I d'après la Proposition 34. Si U est de type II, alors $ind_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} U = M_j(n)$ où $M_j(n)$ est de type II. C'est à dire $M_j(n) \simeq M_{n-j}(n)$ et donc $n = 2j$, et on a $res_{\mathbb{U}}^{\mathfrak{B}} M_j(n) = U \oplus U^\tau$. \square

7. REMERCIEMENTS

Je remercie M. François Digne pour sa direction et son attention cette année pendant mon étude de cet article.

RÉFÉRENCES

- [1] Nicolas Bourbaki, *Eléments de mathématique, fascicule xxxiv : Groupes et algèbres de lie, chapitre iv : Groupes de coxeter et système de tits, chapitre v : Groupes engendrés par des réflexions, chapitre vi : Systèmes de racines*, Herman, Paris, 1968.
- [2] Theodor Bröcker and Tammo tom Dieck, *Representations of compact lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [3] François Digne, *Groupes de Coxeter, Algèbres de Hecke et de Temperley-Lieb.*, Université de Picardie, Amiens, France, 2008 (français).
- [4] Frederick M. Goodman, Pierre De la Harpe, and Vaughan F.R. Jones, *Coxeter graphs and towers of algebras.*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 14. New York etc. : Springer-Verlag, vi, 288 p. DM 68.00, 1989 (anglais).
- [5] Serge Lang, *Algèbre*, Dunod, Paris, 2004 (français).
- [6] Tammo tom Dieck, *Knotentheorien und wurzelsysteme teil ii*, Mathematica Gottingensis **44** (1993).
- [7] ———, *Symmetrische brücken und knotentheorie zu den dynkin-diagrammen vom typ b*, J. Reine Angew. Math. **451** (1994), 71–88.
- [8] ———, *Temperley-lieb algebras associated to the root system d*, Arch. Math. **71** (1998), 407–416.

E-mail address: kgracekennedy@alumni.sewanee.edu